

УДК 624.072.2-023.711

В.В. Габова

**ВЛИЯНИЯ НУМЕРАЦИИ УЗЛОВ И ЭЛЕМЕНТОВ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ
НА СТРУКТУРУ ГЛОБАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ОТКЛИКОВ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА
ПРИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА
ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО МКЭ В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ**

Рассмотрена численная реализация алгоритма статического расчета плоских стержневых систем по смешанной форме метода конечных элементов. Произведен анализ влияния нумерации узлов и элементов основной системы на результаты вычислений.

The paper considers the numerical implementation of the static analysis algorithm for plane rod systems applying the mixed form of FEM. The author studied the influence of the main systems' nodes and elements on the computation results.

Для эффективного применения смешанной формы МКЭ к расчету плоских стержневых систем необходимо использовать наиболее эффективную основную систему. Она должна быть как можно более общей для большинства случаев и позволять выполнять построение локальных матриц откликов и векторов воздействий для всех элементов системы (конструкции) достаточно просто и по единому алгоритму.

Среди различных вариантов стержневых конечных элементов основных систем смешанной формы МКЭ с жесткими узлами наиболее эффективным в практическом применении является конечный элемент, представляющий собой пару простых консольных балок (рис.1).

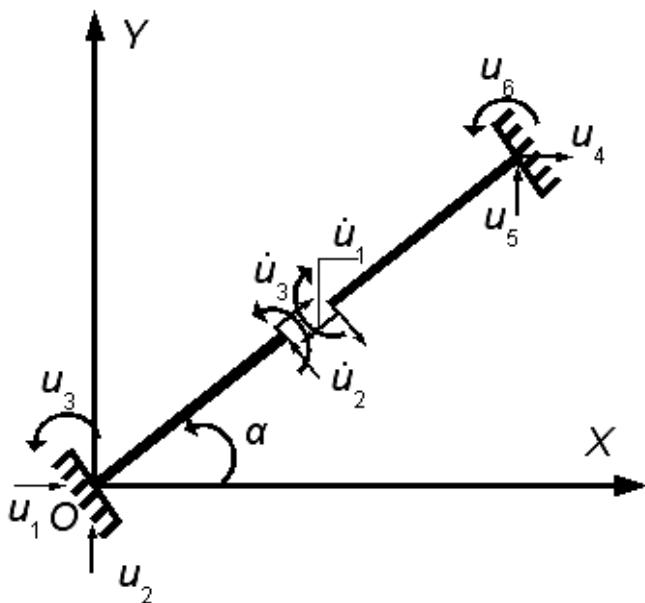


Рис. 1 Основная система смешанной формы метода конечных элементов для стержневого конечного элемента с жесткими узлами

Система канонических уравнений для расчета конструкции по СФ МКЭ, с применением данного конечного элемента, в матричной форме имеет вид

$$[D] \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R_p \\ \Delta_p \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где $[D] = \begin{bmatrix} r & \dot{r} \\ \delta & \dot{\delta} \end{bmatrix}$ — матрица откликов системы; $[r]$ — подматрица реакций в связях основной системы смешанного метода от единичных смещений этих связей; $[\dot{r}]$ — подматрица реакций в связях основной системы от силовых неизвестных при единичных значениях этих неизвестных; $[\dot{\delta}]$ — подматрица перемещений (коэффициентов податливости) по направлению силовых неизвестных от единичных смещений связей основной системы, $([\dot{\delta}] = -[\dot{r}]^T)$; $[\delta]$ — подматрица перемещений (коэффициентов податливости) по направлению силовых неизвестных при единичных значениях этих неизвестных; $\begin{Bmatrix} R_p \\ \Delta_p \end{Bmatrix}$ — вектор воздействий на систему; $\{R_p\}$ — подвектор реакций во введенных связях от нагрузки в основной системе; $\{\Delta_p\}$ — подвектор перемещений по направлению силовых неизвестных от нагрузки в основной системе; $\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}$ — вектор неизвестных смешанного метода; $\{u\}$ — подвектор неизвестных перемещений; $\{\dot{u}\}$ — подвектор неизвестных усилий.

Процесс и особенности ее формирования описаны в [1], поэтому рассмотрим алгоритм статического расчета плоских стержневых систем по СФ МКЭ и особенности его численной реализации с использованием выбранного ранее КЭ.

Алгоритм расчета

1. Сформировать необходимые подматрицы матрицы откликов для каждого конечного элемента.
2. Сформировать вектор воздействий для каждого конечного элемента.
3. Преобразовать матрицы откликов КЭ и векторы воздействий при переходе от локальной к глобальной системе координат.
4. Сформировать необходимые подматрицы глобальной матрицы откликов.
5. Сформировать глобальный вектор воздействий.
6. Решить систему уравнений СФ МКЭ.

Рассмотрим тестовый пример, позволяющий показать влияние нумерации узлов и элементов на вид матрицы откликов и конечные результаты.

Для этого выполним расчет плоской рамы, приведенной на рис. 2, со следующими характеристиками: $EI = \text{const}$, $E = 3 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$, $b = 0,15 \text{ м}$, $h = 0,15 \text{ м}$ и равномерно распределенной нагрузкой $q = 20 \text{ т/м}$.

При выполнении расчетов было применено две схемы нумерации узлов и элементов, представленные на рис. 3. Основные системы (ОС) для них приведены на рис. 4.

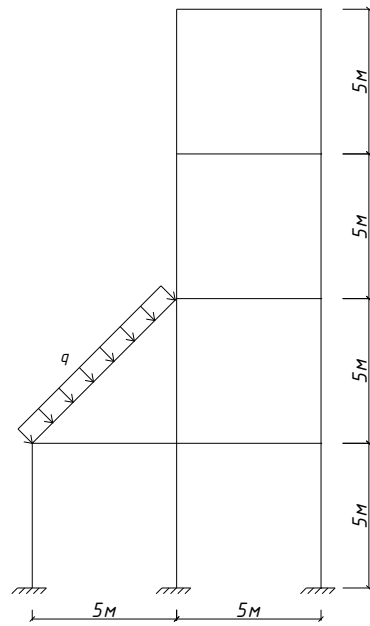


Рис. 2. Плоская рама

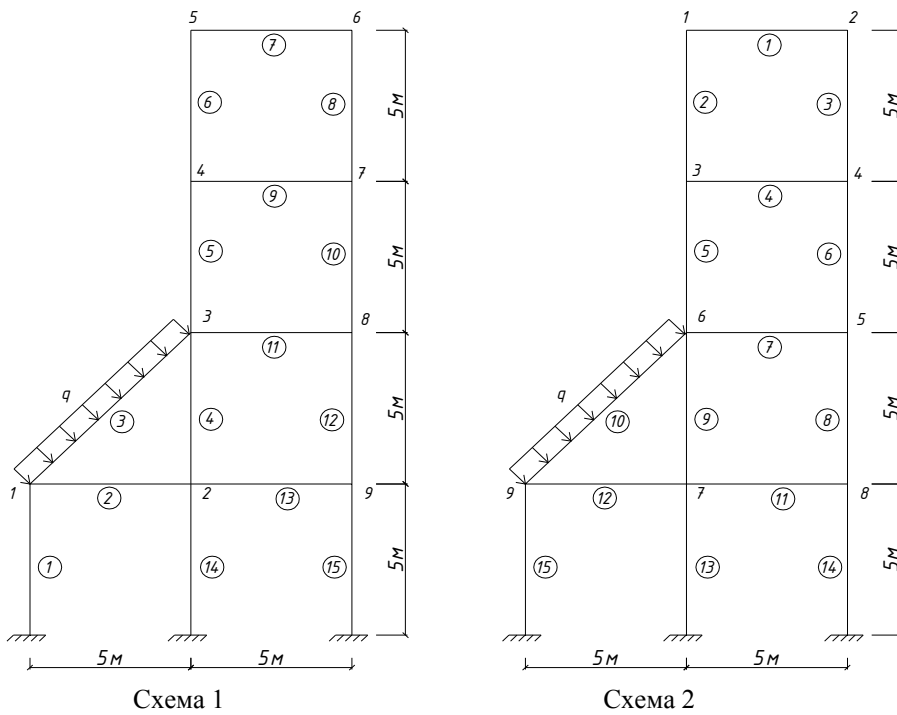


Рис. 3. Схемы нумерации узлов и элементов

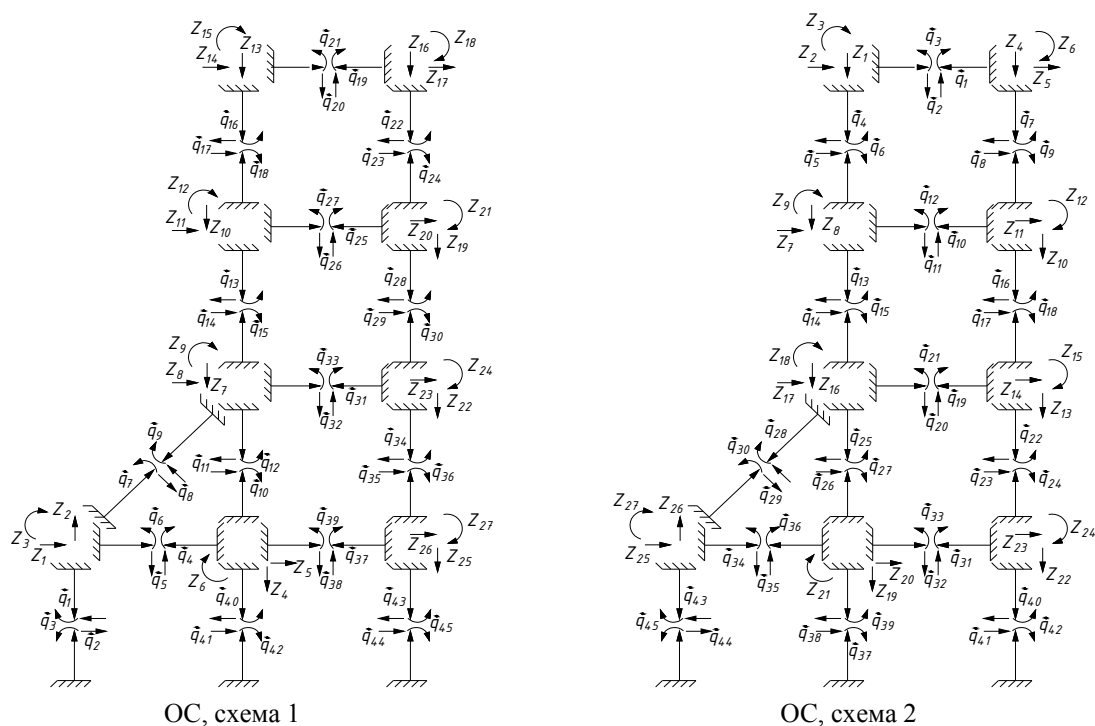


Рис. 4. Основные системы СФ МКЭ для двух видов нумерации узлов и элементов

Блоки матрицы откликов (1) для обеих схем имеют следующую структуру: $[r]$ — квадратная нулевая матрица 27-го порядка; $[\delta]$ — квадратная диагональная матрица 45-го порядка; $[\dot{\delta}]$ — матрица размерности 45×27 .

Вид подматриц $[\delta]$ и $[r]$ существенно не зависит от нумерации узлов и элементов, поэтому рассмотрим только вид подматрицы $[\dot{\delta}]$, схематичный вид которой для рассматриваемых схем нумерации представлен на рис. 5.

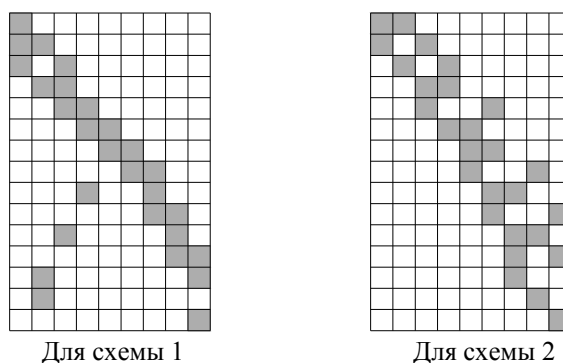


Рис.5. Схематичный вид подматриц откликов для двух схем нумерации узлов и элементов

В первом случае матрица имеет разреженный характер, а во втором случае, матрица имеет структуру близкую к ленточной.

Блоки вектора воздействий на систему имеют вид:
для схемы 1:

$$\{R_p\} = \{R_{p1}, \dots, R_{p27}\},$$

$$\text{где } R_{p1} = -q \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \sin \alpha, R_{p2} = q \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \cos \alpha, R_{p3} = -q \cdot \frac{l_3^2}{8},$$

$$R_{p7} = -q \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \cos \alpha, R_{p8} = -q \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \sin \alpha, R_{p9} = -q \cdot \frac{l_3^2}{8},$$

$$R_{p4}, \dots, R_{p6}, R_{p10}, \dots, R_{p45} = 0.$$

$$\{\Delta_p\} = \{\Delta_{p1}, \dots, \Delta_{p45}\},$$

$$\text{где } \Delta_{p9} = -\frac{l_3^3 \cdot q}{24 \cdot EI}, \Delta_{p1}, \dots, \Delta_{p8}, \Delta_{p10}, \dots, \Delta_{p45} = 0;$$

для схемы 2:

$$\{R_p\} = \{R_{p1}, \dots, R_{p27}\},$$

$$\text{где } R_{p16} = -q \cdot \frac{l_{10}}{2} \cdot \cos \alpha, R_{p17} = -q \cdot \frac{l_{10}}{2} \cdot \sin \alpha, R_{p18} = q \cdot \frac{l_{10}^2}{8},$$

$$R_{p25} = -q \cdot \frac{l_{10}}{2} \cdot \sin \alpha, R_{p26} = q \cdot \frac{l_{10}}{2} \cdot \cos \alpha, R_{p27} = -q \cdot \frac{l_{10}^2}{8},$$

$$R_{p1}, \dots, R_{p15}, R_{p19}, \dots, R_{p24} = 0.$$

$$\{\Delta_p\} = \{\Delta_{p1}, \dots, \Delta_{p45}\},$$

$$\text{где } \Delta_{p30} = -\frac{l_3^3 \cdot q}{24 \cdot EI}, \Delta_{p1}, \dots, \Delta_{p29}, \Delta_{p31}, \dots, \Delta_{p45} = 0.$$

После решения системы канонических уравнений (1) для двух основных систем были получены окончательные эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$, приведены на рис. 6.

Сравнивая эпюры изгибающих моментов (рис. 6), полученные при расчете рамы с использованием схем с разной нумерацией узлов и элементов, можно отметить:

при использовании нумерации по схеме 1 результаты вычислений имеют расхождение с результатами, полученными при расчете в ПК ЛИРА, порядка 2 %;

при использовании нумерации по схеме 2 результаты вычислений полностью совпадают с результатами, полученными при расчете в ПК ЛИРА.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при использовании рассмотренного выше конечного элемента, нумерация узлов и элементов, оказывает существенное влияние на вид блоков матрицы откликов и как следствие на результат вычислений в целом.

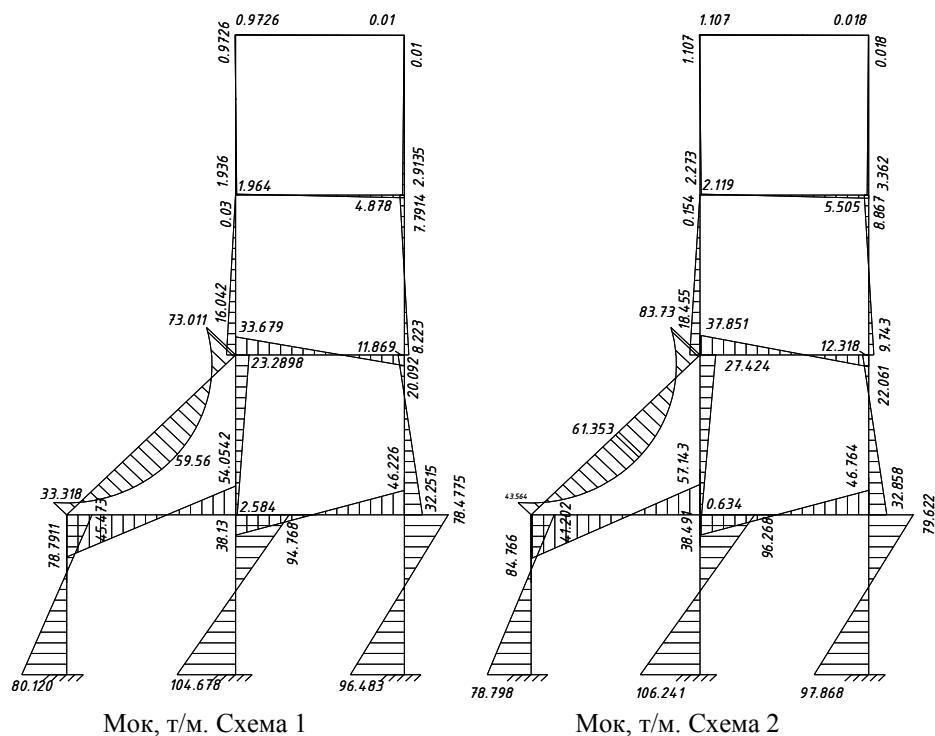


Рис. 6. Окончательные эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Игнатъев А.В.* Алгоритм статического расчета плоских стержневых систем по методу конечных элементов в смешанной форме / А. В. Игнатъев, В.В. Габова // Вестник Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Естественные науки. Вып. 6 (23). 2007. С. 72—77.
2. *Игнатъев В.А.* Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики / В.А. Игнатъев, А.В. Игнатъев, А.В. Жиделев ; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. Волгоград : ВолгГАСУ, 2006. 172 с.

© Габова В.В., 2008

Поступила в редакцию 19.05.08.