

УДК 624.072.2

Е. В. Симон

К РАСЧЕТУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ

Дана оценка места и роли численных методов и в особенности метода конечных элементов в решении прикладных задач механики деформируемого твердого тела и строительной механики. Отражены преимущества этого метода в форме классического смешанного метода строительной механики. Приведен пример расчета геометрически нелинейной системы в виде преднапряженной нити.

К л ю ч е в ы е с л о в а: геометрически нелинейные стержневые системы, МКЭ в смешанной форме.

The author gives the estimation of place and role of numerical methods and the features of the finite element method in solving applied problems of mechanics of deform solid material and structural mechanics. The benefits of this method are reflected in the form of classical mixed method of structural mechanics. An example of calculation of geometrically nonlinear system in the form of prestressed thread is given.

К е y w o r d s: geometrically nonlinear bar systems, FEM in mixed form.

Чтобы выбрать наилучшее конструктивное решение инженерного сооружения, необходимо иметь возможность прогнозирования его поведения в зависимости от различных вариантов воздействия на него. Для такого прогнозирования, т. е. для определения качественной и количественной картины напряженно-деформированного состояния сооружения, используются как аналитические, так и численные методы.

Основным преимуществом аналитических методов является возможность получения решения в общей форме, позволяющей определить изменение какой-либо одной или нескольких характеристик конструкции (прогибы, перемещения, усилия, напряжения, температура и т. п.) в любой ее точке и в любой момент времени в зависимости от вида воздействия на эту конструкцию. Решение в общей форме позволяет проанализировать степень влияния различных факторов, действующих на сооружение, и выделить наиболее важные.

Основным недостатком аналитических методов и полученных на их основе решений в общей форме является громоздкость этих решений и невозможность зачастую получить численный результат без перехода к дискретизации аналитических выражений и формул.

Трудоемкость реализации алгоритмов такой дискретизации сравнима с трудоемкостью реализации алгоритмов численных методов. Недостатком аналитических методов является также и то, что они применимы только для сооружений и конструкций простых форм и с упорядоченной внутренней структурой, допускающей аналитическое описание ее свойств. Аналитические методы не могут быть использованы также для расчета сооружений и конструкций произвольной геометрии [1].

Если в основу расчета положить дифференциально малый элемент, то задача сводится к дифференциальным уравнениям. Решение многих реальных задач с помощью дифференциальных уравнений ввиду наличия сложного контура, ступенчатого изменения жесткости и т. п. вызывает большие трудности.

Давно сложившимися средствами решения трудных прикладных задач являются вариационные методы и метод сеток. Однако применение этих методов в явном виде не всегда дает возможность просто и достаточно точно рассчитать сложные многоэлементные конструкции, особенно если эти конструкции содержат элементы разной мерности, например совместный расчет оболочки и подкрепляющих ее ферм. Более того, даже при решении обыкновенного дифференциального уравнения численным методом нужно заменять производные конечными отношениями, т. е. необходима дискретизация рассматриваемой задачи.

С другой стороны, если за основу взять элементы конечных размеров, то в итоге приходим к алгебраическим уравнениям типа уравнений метода сил или метода перемещений, применяемым при расчете статически неопределимых систем [2].

Численные методы позволяют найти значение искомой функции в конечном числе расчетных точек независимо от формы сооружения или конструкции, от расположения нагрузок, распределения физических свойств материала в рассматриваемой области сооружения.

Все это, в сочетании с быстро растущими возможностями ЭВМ, обеспечило широкое распространение численных методов в инженерных расчетах, оставив аналитическим методам важное место эталонных решений при тестировании надежности вычислительных комплексов и пакетов прикладных программ.

Если самым значительным достижением строительной механики первой половины XX в. является метод сеток, то величайшим ее достижением во второй половине XX в., безусловно, является метод конечных элементов. Появление этого метода не только произвело революционный переворот непосредственно в развитии строительной механики как науки, но и повлияло на развитие теории численных методов и их применение в других областях науки, таких как механика деформируемого твердого тела, аэрогидродинамика, теплофизика и др.

Традиционные термины и понятия строительной механики используются теперь во многих отраслях науки.

Исторически возникновение МКЭ связано с идеей приложения хорошо разработанных алгоритмов расчета статически и кинематически неопределимых стержневых систем к решению двумерных и трехмерных задач теории упругости. Эта идея дискретизации сплошной среды для упрощения расчетов возникла еще в XIX в, однако ее реализация стала возможной лишь с появлением ЭВМ в середине XX в.

Вначале МКЭ рассматривался как развитие классических методов строительной механики и применялся в основном в этой области. В дальнейшем совместными усилиями математиков, инженеров и программистов он разрабатывался и развивался как разновидность вариационно-разностных методов

(методов Ритца, Бубнова — Галеркина и др.). Позднее оба эти подхода были объединены и в настоящее время рассматриваются как два аспекта одного и того же метода.

В разработку теоретических основ МКЭ и его приложение большой вклад внесли многие исследователи. Особенно большой вклад на начальном этапе развития МКЭ был внесен М. Дж. Тернером, Дж. Х. Аргиром, Р. В. Клафом, О. К. Зенкевичем, Л. А. Розиным, Дж. Оденом, В. А. Постновым, Г. Стренгом, Д. Фиксом и др. В настоящее время библиография по МКЭ включает десятки тысяч наименований.

Континуальную среду, представленную дискретной расчетной схемой, можно рассчитывать любым из методов строительной механики стержневых систем. При реализации метода конечных элементов наибольшее распространение получил метод перемещений, хотя имеются работы, где используется метод сил, применение же смешанного метода показано ниже.

Предпочтение методу перемещений было отдано в основном по двум причинам. Во-первых, при построении вспомогательного напряженного состояния из многоэлементной конструкции легче получить кинематически определимую систему, нежели статически определимую. Во-вторых, при расчете методом перемещений матрица коэффициентов при неизвестных составляется очень просто и к тому же часто получается ленточной.

Как за рубежом, так и в нашей стране разработан ряд программ, реализующих МКЭ в форме метода перемещений. К ним относятся NASTRAN, ANSYS, MARC, DINA, SCAD, ЛИРА и др.

Кроме МКЭ, в форме метода перемещений иногда встречаются (при рассмотрении задач механики деформируемого твердого тела) его варианты в форме метода сил, смешанных и гибридных методов.

В задачах строительной механики применению МКЭ в смешанной форме посвящено лишь небольшое число работ. В целом, имеющиеся на сегодняшний день исследования по смешанному методу и смешанной форме МКЭ не позволяют формализовать его и алгоритмизировать с той же простотой, что и МКЭ в форме метода перемещений.

В то же время следует отметить, что при использовании МКЭ в форме метода перемещений в кинематических граничных условиях содержатся смещения твердого тела, не связанные с работой внутренних сил. Это приводит к вырожденности матрицы жесткости КЭ, вызывает ухудшение обусловленности матрицы жесткости конструкции с увеличением числа элементов, когда необходимо повысить точность решения в опасных зонах или при итерационном решении нелинейных задач.

С ростом параметров нагрузки конструкции проходят ряд стадий напряженно-деформированного состояния вплоть до разрушения. Поэтому условия неразрывности в некоторых зонах могут нарушаться, что приводит к изменению расчетной схемы МКЭ в перемещениях.

Сложности применения МКЭ в перемещениях возникают также при включении в конструкцию недеформируемых или очень податливых элементов, появлении разрывов на предельных стадиях нагружения и расчетах геометрически изменяемых систем в виде кинематической сети.

За последние годы появились новые трансформируемые конструкции, состоящие из недеформируемых элементов (например, в космонавтике, где эти конструкции в сложенном виде доставляются на орбиту и потом автоматически раскрываются и принимают заданную геометрическую форму). Для описания их напряженно-деформированного состояния МКЭ в перемещениях также неэффективен.

Если же принять расчетную схему МКЭ со смешанными неизвестными, т. е. использовать известный в строительной механике классический смешанный метод, то можно исключить упомянутые выше проблемы.

Такая расчетная схема будет применима к любым типам элементов и будет неизменной на всех стадиях работы конструкции, включая ее переход в механизм [1].

Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода, предложенный проф. В. А. Игнатьевым и развиваемый в его научной школе, позволяет решать широкий круг задач. Примером применения МКЭ в смешанной форме может служить следующая задача с преднапряженной нитью.

К предварительно нагруженной гибкой нити, закрепленной в двух точках, длиной $2l = 10$ м, жесткостью поперечного сечения $EA = 1000$ т, имеющей начальное натяжение $N_0 = 10$ т, в середине пролета прикладывают силу $P = 1$ т (рис. 1). Требуется найти прогиб f и окончательную величину усилия в нити N_f .

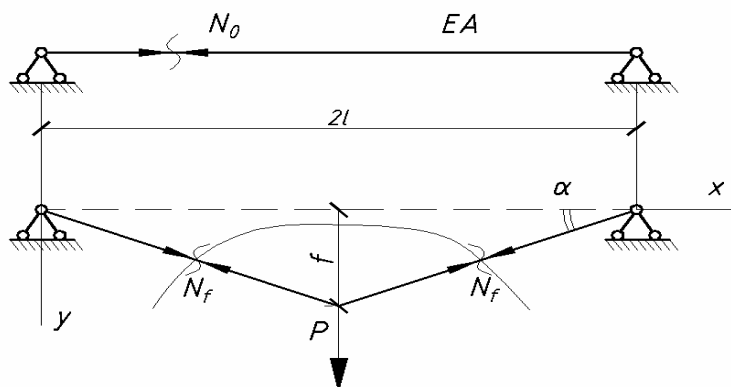


Рис. 1

Решим данную задачу методом конечных элементов в смешанной форме.

Основная система смешанного метода с учетом симметрии показана на рис. 2. Из геометрии этой системы следует, что

$$q_2 = l \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Система уравнений для левой половины, принятой за один конечный элемент, является в данном случае разрешенной и имеет канонический вид

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_{1,1} q_1 + \tilde{\delta}_{1,2} q_2 = 0, \\ R_2 = \tilde{r}_{2,1} q_1 + r_{2,2} q_2 + r_{2,p} + N \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (2)$$

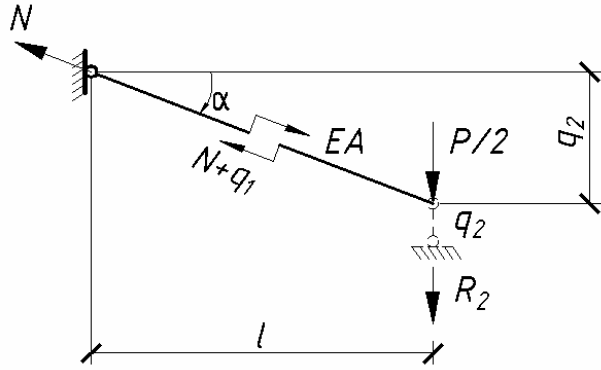


Рис. 2

Первое из этих уравнений представляет собой условие неразрывности деформации в месте приложения внутренних усилий N и $q_1^{(0)}$ в основной системе. В нем отражен тот факт, что деформированное состояние (рис. 1) возможно только за счет неизвестного дополнительного усилия $q_1^{(0)}$.

Второе уравнение также является условием эквивалентности заданной (рис. 1) и основной (рис. 2) систем. В данном случае это условия равновесия основной системы и одновременно отсутствия реакции во введенной дополнительной вертикальной связи в основной системе.

В этих условиях q_1 — неизвестное дополнительное усилие в нити, возникающее при ее прогибе от поперечной нагрузки P , q_2 — неизвестное вертикальное перемещение в точке приложения нагрузки.

Находим коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{1,1} = \frac{l}{EF}, \quad \tilde{\delta}_{1,2} = -\sin \alpha, \quad \tilde{r}_{2,1} = -\tilde{\delta}_{1,2}, \quad r_{2,2} = 0, \quad r_{2,p} = -\frac{P}{2}.$$

Получить решение можно как из первого, так из второго уравнения системы (2). Из первого уравнения находим

$$q_1 = -\frac{\tilde{\delta}_{1,2}}{\delta_{1,1}} \tilde{q}_2, \quad (3)$$

подставим во второе, получим:

$$R_2 = \left(-\frac{\tilde{\delta}_{1,2}}{\delta_{1,1}} \tilde{r}_{2,1} + r_{2,2} \right) \tilde{q}_2 + r_{2,p} + N \sin \alpha = 0,$$

или

$$R_2 = \left(\frac{EF}{l} \sin^2 \alpha \right) q_2 + N \sin \alpha - \frac{P}{2} = 0. \quad (4)$$

Из второго уравнения находим

$$q_1 = -\frac{1}{\tilde{r}_{2,1}}(r_{2,p} + N \sin \alpha),$$

подставив в первое, получим:

$$\delta_1 = -\frac{\delta}{\tilde{r}_{2,1}}(r_{2,p} + N \sin \alpha) + \tilde{\delta}_{1,2} \tilde{q}_2 = 0. \quad (5)$$

Так как $q_2 = l \operatorname{tg} \alpha$, приведем уравнения (4) и (5) к функциям:

$$F_1(\alpha) = R_2 = \left(\frac{EF}{l} \sin^2 \alpha \right) l \operatorname{tg} \alpha + N \sin \alpha - \frac{P}{2} = 0, \quad (6)$$

$$F_2(\alpha) = \delta_1 = -\frac{l}{EF \sin \alpha} \left(-\frac{P}{2} + N \sin \alpha \right) - \sin \alpha l \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Определяя нули функции $F_1(\alpha)$ и $F_2(\alpha)$, получаем одинаковый результат:

$$q_1 = 1,7978 \text{ т}; \quad q_2 = 0,2121 \text{ м, т. е.:}$$

$$N_f = 11,7978 \text{ т, } f = 0,2121 \text{ м, } \alpha = 2,4290^\circ.$$

Аналитическое решение этой задачи через уравнение равенства работ внешних и внутренних сил, приводимое в [3], дает следующие результаты:

$$N_f = 11,8852 \text{ т, } f = 0,2063 \text{ м, } \alpha = 2,3626^\circ.$$

Результаты показывают незначительное расхождение, которое следует отнести к погрешностям расчетов при поиске корней разрешающих уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Игнатьев В. А., Игнатьев А. В.* Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики. Волгоград, 2005.
2. *Масленников А. М.* Расчет строительных конструкций численными методами. Л., 1987.
3. *Рекач В. Г.* Руководство к решению задач прикладной теории упругости. М.: Высш. шк., 1973.

1. *Ignat'ev V. A., Ignat'ev A. V.* Smeshannaya forma metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki. Volgograd, 2005.
2. *Maslennikov A. M.* Raschet stroitel'nykh konstruksiy chislennymi metodami. L., 1987.
3. *Rekach V. G.* Rukovodstvo k resheniyu zadach prikladnoy teorii uprugosti. M.: Vyssh. shk., 1973.

© Симон Е. В., 2012

Поступила в редакцию
в ноябре 2012 г.

Ссылка для цитирования:

Симон Е. В. К расчету геометрически нелинейных стержневых систем в смешанной форме // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2012. Вып. 3 (23).