

УДК 624.042

В. Н. Ромашкин

СУПЕРЭЛЕМЕНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА ЧАСТОТНО-ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ

Выявлены недостатки классического варианта метода частотно-динамической конденсации (ЧДК) для уравнений метода конечных элементов. Приводятся результаты исследований по применению метода подконструкций (суперэлементов) для повышения эффективности метода ЧДК. Рассматриваются одноуровневая и многоуровневая схемы разделения на подконструкции. Дана оценка точности предлагаемых вариантов метода ЧДК при расчете одномерных и двумерных балочных систем на свободные колебания.

К л ю ч е в ы е с л о в а: неполная алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений, частотно-динамическая конденсация, подконструкции.

Disadvantages of classical method of the frequency and dynamic condensation (FDC) for the equations of finite element method are revealed. The results of the researches on application of the method of substructures (superelements) to increase the efficiency of the FDC method are provided. Single-level and multilevel schemes of division into substructures are considered in the article. The assessment of accuracy of offered options of the FDC method when calculating one-dimensional and two-dimensional beam systems on free fluctuations is given.

К е у w o r d s: incomplete algebraic problem of own eigenvectors and eigenvalues, frequency and dynamic condensation, substructures.

Одним из методов, применяемых для решения неполной проблемы собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ) высокого порядка [1], является метод последовательной частотно-динамической конденсации, предложенный в [2] и развитый в [3, 4]. Расчеты, выполненные в [3], показали, что данный метод позволяет определить интересующее количество частот из нижней части спектра с требуемой точностью. Но точность вычисления СЗ в значительной степени зависит от способа выбора главных и второстепенных степеней свободы. Парциальные системы следует строить так, чтобы второстепенные степени свободы были равномерно распределены между главными степенями, т. е. позволяли уточнять форму колебаний (условие подобия конденсированной к главным степеням свободы системы и парциальной системы) [3]. Если это условие не выполняется, то погрешность в вычислении частот резко возрастает. Так как процесс создания парциальных систем должен быть полностью автоматическим, то одним из способов выполнения этого условия является построение последовательно расширяющихся парциальных систем. В 1-ю парциальную систему включаются все второстепенные степени свободы, смежные с главными. Во 2-ю парциальную систему включаются все второстепенные степени свободы, смежные с второстепенными степенями свободы 1-й группы. Процесс повторяется для каждой последующей парциальной системы, пока не будут включены все второстепенные степени свободы. Однако при этом способе построения происходит эффект «наращивания» парциальных систем: каждая последующая парциальная система будет содержать большее число степеней свободы, чем предыдущая. Поэтому может оказаться так, что парциальные системы, построенные последними, также будут иметь высокую размерность.

С точки зрения производительности метода ЧДК его узким местом является процедура многократной статической конденсации заданной системы

к парциальным системам (шаг 3 алгоритма ЧДК [3]). Построение парциальной системы требует значительных вычислительных затрат, связанных с обращением большого блока безынерционных степеней свободы и последующих матричных умножений высокой размерности. Для построения каждой последующей парциальной системы приходится заново повторять эту «тяжелую» процедуру исключения безынерционных степеней свободы, которые уже были исключены для предыдущей парциальной системы.

Все это может привести к невозможности решения задачи из-за высокой размерности; время расчета может существенно возрасти и стать сопоставимым со временем расчета, использующего традиционные методы.

Для решения проблемы низкой производительности при создании парциальных систем в [4] предлагается выбирать главные степени свободы так, чтобы весь блок второстепенных степеней свободы распался на ряд независимых друг от друга блоков. Тогда матрицы жесткости и масс будут представлены в квазидиагональной форме, а матрицы, конденсированные к главным степеням свободы, можно переписать в блочной форме:

$$\left. \begin{aligned} K_{mm}^G &= K_{mm} - \sum_{i=1}^t K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)}, \\ M_{mm}^G &= M_{mm} - \sum_{i=1}^t M_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)} - K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} M_{sm}^{(i)} + \\ &+ K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} M_{ss}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где m — индексы, относящиеся к главным степеням свободы; s — индексы, относящиеся к второстепенным степеням свободы; G — процедура статической конденсации [5]; t — количество независимых блоков.

Матрицы жесткости и масс парциальных систем могут быть получены из (1) с помощью обратного преобразования:

$$\left. \begin{aligned} K_{m^{(i)}m^{(i)}}^G &= K_{mm}^G + K_{ms}^{(i)} K_{ss}^{(i)}, \\ M_{m^{(i)}m^{(i)}}^G &= M_{mm}^G + M_{ms}^{(i)} - \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)} + \\ &+ K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} M_{sm}^{(i)} - K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} M_{ss}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В результате получение парциальных систем здесь достигается очень экономичным способом, но применение такого подхода может приводить к погрешностям вследствие нарушения условий подобия главной и парциальных систем. Выше было отмечено, что данный подход требует, чтобы главные степени свободы выбирались в узлах-разделителях¹. Найти «узкие» разделители возможно лишь для определенного узкого круга задач (задачи, обладающие высокой степенью повторяемости подсистем) [6], поэтому это может приводить к увеличению размерности конденсированной к главным степеням свободы системы.

¹ Узлы-разделители — это группа узлов в конечно-элементной модели, удаление которых приводит к разделению конструкции на не связанные между собой подконструкции.

Очевидно, что данный подход требует доработки. В рамках настоящей статьи были выполнены исследования по применению предлагаемых методов разделения на подконструкции, позволяющих устранить отмеченные недостатки.

Метод подконструкций. Метод подконструкций является широко применяемым инженерным методом для анализа сложных конструкций высокой размерности. Преимущество этого метода заключается в том, что подконструкции, на которые разделяется исходная расчетная модель, обладают уже значительно меньшим порядком и могут быть рассчитаны независимо друг от друга. Впервые основные идеи метода были изложены в [7] и получили дальнейшее развитие в [8]. Применение метода подконструкций для решения неполной проблемы СЗ и СВ было предложено в методе синтеза форм колебаний [9], основная идея которого заключается в нахождении собственных форм каждой подконструкции, объединение их в матрице динамического преобразования и последующее редуцирование заданной системы уравнений. В работах [10—14] данный подход получил дальнейшее развитие за счет использования многоуровневых методов.

Рассмотрим способы совместного использования метода подконструкций и ЧДК. Метод подконструкций используется как основополагающий редуциционный метод, а метод ЧДК — как внутренняя процедура исключения второстепенных степеней свободы подконструкций. Данный метод может применяться в одноуровневой и многоуровневой трактовках.

Одноуровневая частотно-динамическая конденсация. Алгоритм данного метода состоит в следующем:

1. Разделить заданную расчетную модель на множество последовательно соединенных t -подконструкций.

2. Для каждой S_i из t -подконструкций ($i = 1, 2, \dots, t$) необходимо:

2.1. Построить систему уравнений свободных колебаний подконструкции:

$$\left[K^{(S_i)} - \lambda M^{(S_i)} \right] z = 0. \quad (3)$$

2.2. Назначить некоторое количество главных степеней свободы. Если границы подконструкций свободные, то все степени свободы граничных узлов должны быть также назначены в качестве главных. Все остальные степени свободы назначаются второстепенными:

$$\left[K_{mm}^{G(S_i)} - \lambda M_{mm}^{G(S_i)} \right] z_m = 0. \quad (4)$$

2.3. Выполнить исключение внутренних второстепенных степеней свободы методом одноэтапной (однотуповой) частотно-динамической конденсации системы (3) к (4), используя [3, выражения 2.19—2.24]. В результате получим конденсированную к главным степеням свободы подконструкции систему:

$$\left[K_{mm}^{G(S_i)} - \lambda M_{mm}^{\text{cond}(S_i)} \right] z_m = 0. \quad (5)$$

3. Объединить полученные конденсированные матрицы для всех подконструкций и получить систему уравнений:

$$\left[K_{qq}^{un} - \lambda M_{qq}^{un} \right] z_q = 0. \quad (6)$$

тод строит структуру уровней графа с корнем в псевдопериферийной вершине. Узлы-разделители выбираются как множество узлов одного из полученных уровней. Если известны только глобальные матрицы исходной конструкции, метод параллельных сечений может быть применен к графу связности, построенному из этих матриц.

К достоинствам вышеописанного алгоритма можно отнести его независимость от выбора мест расположения второстепенных степеней свободы, так как исключение всех второстепенных степеней свободы внутри каждой подконструкции выполняется за один этап. По этой же причине конденсация системы (3) к (4) выполняется точно (при конденсации используются СЗ системы (3)). Поэтому можно ожидать вычисление СЗ с достаточной степенью точности. В случае недостаточной точности можно учесть влияние смежных подконструкций при построении системы уравнений на шаге 2.1, выполнив статическую конденсацию степеней свободы смежных подконструкций к границам текущей рассчитываемой подконструкции.

Порядок получаемых подконструкций может оставаться все еще достаточно высоким [2], поэтому далее предлагается рассмотреть многоуровневую схему.

Многоуровневая частотно-динамическая конденсация. В данном методе исходная конструкция представляется в виде совокупности иерархически построенных подконструкций нескольких уровней, число которых определяется как планируемой точностью решения, так и возможностями используемой ЭВМ. Предположим, что конструкция разбита на несколько подконструкций, рассматриваемых как подконструкции 1-го уровня. Любая из этих подконструкций может быть также разбита на некоторое количество подконструкций 2-го уровня и т. д. до подконструкций последнего уровня, состоящих из базисных конечных элементов. Сборка подконструкций выполняется в обратном порядке, начиная с последнего уровня. Каждая подконструкция собирается из подконструкций нижнего уровня, вложенных в нее. При сборке выполняется исключение внутренних степеней свободы и объединение подконструкций в общих (граничных) узлах. На следующем шаге сборки исключаются узлы, которые были общими на предыдущем шаге. Процесс сборки происходит до тех пор, пока не достигнет уровня исходной конструкции (нулевого уровня). Следует отметить, что обязательное условие здесь — это наличие общих свободных границ у каждой из подконструкций, иначе многоуровневая сборка невозможна.

Рассмотрим алгоритм метода.

1. Выполнение прямого хода: получение древовидной структуры подконструкций, каждая из которых может быть простой или составной. Корнем такой структуры является исходная подконструкция. Выполнить шаг 2 для корня этой структуры.

2. Сборка составной подконструкции. Для каждой вложенной подконструкции выполнить следующее:

2.1. Если подконструкция простая, то включить ее в список объединения, или же выполнить ее сборку (повторить шаг 2 для нее) и также включить в список объединения.

2.2. Собрать все подконструкции из получившегося списка, используя алгоритм (3—6).

3. Решить полную проблему СЗ и СВ для собранной корневой подконструкции.

Для автоматического выполнения прямого хода метода может быть использован алгоритм вложенных сечений [15], также применяемый к графу узлов расчетной модели или глобальных матриц. Генерацию древовидной структуры можно продолжать до тех пор, пока получаемые подконструкции не достигнут нужного размера.

Достоинство вышеприведенного многоуровневого алгоритма в том, что он позволяет построить весь процесс сборки и конденсации из действительно небольших подсистем, размер которых можно контролировать.

Нахождение СЗ подконструкции как жесткого целого. Применение вышеописанных алгоритмов с техникой свободных границ может приводить к образованию подконструкций, движение которых описывается системой уравнений как жесткого целого:

$$\left[K^{(S_i)} - \lambda M^{(S_i)} \right] z = 0, \quad (8)$$

где $K^{(S_i)}$ обладает сингулярностью; k первых СЗ ($k = 6$ для пространственной задачи) будут нулевыми. В этом случае оказывается невозможным выполнить условие эквивалентности по совпадению частот исходной и редуцированной систем [2], применяемое в методе ЧДК. Для преодоления этой проблемы можно воспользоваться техникой сдвигов. Сдвиг на величину s позволяет перейти к новой задаче на собственные значения:

$$\left[K_{\text{shifted}}^{(S_i)} - \gamma M^{(S_i)} \right] z = 0, \quad (9)$$

где $K_{\text{shifted}}^{(S_i)} = K^{(S_i)} + sM^{(S_i)}$ будет уже положительно определенной в случае положительного значения величины сдвига, а собственные числа окажутся сдвинутыми на величину s ($\gamma = \lambda - s$). Так как (9) имеет единственное решение, то СВ (8) и (9) будут совпадать [1].

После применения ЧДК к (9) получим

$$\left[K_{\text{shifted}}^{(S_i)} - \gamma M^{\text{cond}(S_i)} \right] z = 0. \quad (10)$$

Для получения «несдвинутой» матрицы жесткости выполняется обратный сдвиг:

$$K^G(S_i) = K_{\text{shifted}}^{(S_i)} - sM^{\text{cond}(S_i)}. \quad (11)$$

Численные эксперименты. Данный раздел — содержит результаты численных экспериментов, проведенных над одно- и двумерными балочными системами.

В первый тестовый набор включены различные варианты схем конденсации с различным числом главных узлов в жестко защемленной по концам 12-пролетной балке с равномерно распределенной массой и жесткостью, дискретизированных в 11 узловых точках.

В табл. 1 предложены два варианта деления на подконструкции:

с наличием общей свободной границы — схемы 3, 6 (узлы 4 и 8 считаются граничными);

с жестко заземленными границами — схемы 4, 7.

В 1-м варианте конденсация выполнялась в две стадии:

1) конденсация к главным и граничным узлам внутри подконструкций;

2) объединение подконструкций в граничных узлах и последующая конденсация к главным узлам.

Во 2-м варианте частотно-динамическая конденсация масс выполняется согласно схеме. Конденсация жесткостей выполняется обычным способом.

Для исключения второстепенных степеней свободы внутренних узлов подконструкций используется точная (однорупповая) конденсация.

Для сравнения результатов в тестирование были включены классические схемы (без разделения на подконструкции) однорупповой (схема 1) и двухрупповой (схемы 2, 5) конденсации, а также методы статической конденсации и перераспределения масс.

Т а б л и ц а 1

Схемы конденсации

№ схемы	Схема расположения главных и второстепенных узлов / схема разделения на подконструкции
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

В табл. 1 приняты следующие обозначения: ● — главный, ⊙ — граничный, • — второстепенный, $\overset{\cdot}{\bullet}$ — второстепенный (*i*-й группы) узлы.

В табл. 2 приведены результаты вычисления СЗ балки по каждой схеме.

Т а б л и ц а 2

Сравнительные результаты тестирования с помощью различных методов

№ схемы	Метод статической конденсации	Метод приведения масс	Метод ЧДК	Точные СЗ
1	$\lambda_1 = 0,0243$ (-0,84 %) $\lambda_2 = 0,1973$ (-7,56 %) $\lambda_3 = 0,7331$ (-3,90 %)	$\lambda_1 = 0,0247$ (-2,17 %) $\lambda_2 = 0,2630$ (-43,34 %) $\lambda_3 = 0,4073$ (42,28 %)	$\lambda_1 = 0,02414$ (0 %) $\lambda_2 = 0,18347$ (0 %) $\lambda_3 = 0,70562$ (0 %)	0,02414 0,18347 0,70562

Окончание табл. 2

2	$\lambda_1 = 0,0243$ (-0,84 %) $\lambda_2 = 0,1973$ (-7,56 %) $\lambda_3 = 0,7331$ (-3,90 %)	$\lambda_1 = 0,0247$ (-2,17 %) $\lambda_2 = 0,2630$ (-43,34 %) $\lambda_3 = 0,4073$ (42,28 %)	$\lambda_1 = 0,0240$ (0,75 %) $\lambda_2 = 0,1724$ (6,03 %) $\lambda_3 = 0,6894$ (2,30 %)	0,02414 0,18347 0,70562
3	$\lambda_1 = 0,0243$ (-0,84 %) $\lambda_2 = 0,1973$ (-7,56 %) $\lambda_3 = 0,7331$ (-3,90 %)	$\lambda_1 = 0,0247$ (-2,17 %) $\lambda_2 = 0,2630$ (-43,34 %) $\lambda_3 = 0,4073$ (42,28 %)	$\lambda_1 = 0,0241$ (-0,02 %) $\lambda_2 = 0,1837$ (-0,15 %) $\lambda_3 = 0,7116$ (-0,85 %)	0,02414 0,18347 0,70562
4	$\lambda_1 = 0,85$ (>100 %) $\lambda_2 = 0,85$ (>100 %) $\lambda_3 = 0,02$ (>100 %)	$\lambda_1 = 0,0247$ (-2,17 %) $\lambda_2 = 0,2630$ (-43,34 %) $\lambda_3 = 0,4073$ (42,28 %)	$\lambda_1 = 0,02414$ (0 %) $\lambda_2 = 0,18347$ (0 %) $\lambda_3 = 0,70562$ (0 %)	0,02414 0,18347 0,70562
5	$\lambda_1 = 0,0242$ (-0,05 %) $\lambda_2 = 0,1842$ (-0,37 %) $\lambda_3 = 0,7154$ (-1,38 %) $\lambda_4 = 2,0042$ (-3,78 %) $\lambda_5 = 4,80$ (-11,03 %) $\lambda_6 = 8,7750$ (-3,52 %)	$\lambda_1 = 0,0242$ (-0,12 %) $\lambda_2 = 0,1847$ (-0,65 %) $\lambda_3 = 0,7141$ (-1,20 %) $\lambda_4 = 1,8794$ (2,69 %) $\lambda_5 = 6,2082$ (-43,61 %) $\lambda_6 = 6,4233$ (24,22 %)	$\lambda_1 = 0,0241$ (0 %) $\lambda_2 = 0,1835$ (0 %) $\lambda_3 = 0,7056$ (0,01 %) $\lambda_4 = 1,9315$ (-0,01 %) $\lambda_5 = 4,3211$ (0,04 %) $\lambda_6 = 8,4744$ (0,02 %)	0,02414 0,18347 0,70562 1,93129 4,32296 8,47618
6	$\lambda_1 = 0,0242$ (-0,05 %) $\lambda_2 = 0,1842$ (-0,37 %) $\lambda_3 = 0,7154$ (-1,38 %) $\lambda_4 = 2,0042$ (-3,78 %) $\lambda_5 = 4,80$ (-11,03 %) $\lambda_6 = 8,7750$ (-3,52 %)	$\lambda_1 = 0,0242$ (-0,12 %) $\lambda_2 = 0,1847$ (-0,65 %) $\lambda_3 = 0,7141$ (-1,20 %) $\lambda_4 = 1,8794$ (2,69 %) $\lambda_5 = 6,2082$ (-43,61 %) $\lambda_6 = 6,4233$ (24,22 %)	$\lambda_1 = 0,0241$ (-0,01 %) $\lambda_2 = 0,1834$ (0,02 %) $\lambda_3 = 0,7077$ (-0,29 %) $\lambda_4 = 1,9458$ (-0,75 %) $\lambda_5 = 4,4449$ (-2,82 %) $\lambda_6 = 8,5603$ (-0,99 %)	0,02414 0,18347 0,70562 1,93129 4,32296 8,47618
7	$\lambda_1 = 0,8145$ (>100 %) $\lambda_2 = 0,8145$ (>100 %) $\lambda_3 = 2,0508$ (>100 %) $\lambda_4 = 6,7634$ (>100 %) $\lambda_5 = 6,7634$ (56,45 %) $\lambda_6 = 15,309$ (-80,62 %)	$\lambda_1 = 0,0297$ (-23,03 %) $\lambda_2 = 0,1977$ (-7,75 %) $\lambda_3 = 0,7732$ (-9,58 %) $\lambda_4 = 2,3116$ (-19,69 %) $\lambda_5 = 6,2209$ (-43,90 %) $\lambda_6 = 6,5045$ (23,26 %)	$\lambda_1 = 0,0303$ (-25,36 %) $\lambda_2 = 0,2412$ (-31,48 %) $\lambda_3 = 0,6832$ (3,18 %) $\lambda_4 = 2,6394$ (-36,67 %) $\lambda_5 = 5,0849$ (-17,62 %) $\lambda_6 = 7,4923$ (11,61 %)	0,02414 0,18347 0,70562 1,93129 4,32296 8,47618

Результаты, полученные в табл. 2, позволяют сделать следующие выводы:
метод приведения масс менее точен по сравнению с методом статической конденсации;

метод статической конденсации уступает в точности методу частотно-динамической конденсации;

при увеличении числа главных степеней свободы точность вычисления СЗ увеличивается;

способ разделения балки на подконструкции с закрепленными границами приводит к потере точности в вычислениях СЗ и неприменим для выполнения расчетов (схемы 4, 7);

способ разделения балки на подконструкции со свободными границами позволяет вычислять нужное количество СЗ балки с достаточно высокой степенью точности (схемы 3, 6);

применение подконструкций со свободными границами не оказывает влияние на точность статической конденсации.

Разделение балки на подконструкции по схемам (3, 6) приводит к образованию подконструкции как жесткого целого. Для вычисления СЗ и СВ использовался способ «сдвига» СЗ, описанный выше.

Далее проверим влияние величины сдвига на точность вычислений.

Табл. 3 показывает сильную зависимость точности вычислений от параметра сдвига. При $\rho = -100$ определить СЗ вообще не удалось. При $-1 \leq \rho \leq 1$ СЗ определяются достаточно точно.

Т а б л и ц а 3

Зависимость точности вычисления СЗ от величины сдвига

Величина сдвига s	Вычисленные по методу ЧДК три младших СЗ	Величина сдвига s	Вычисленные по методу ЧДК три младших СЗ
-100	—	100	$\lambda_1 = 0,3935$ (-1530 %) $\lambda_2 = 0,4392$ (-139 %) $\lambda_3 = 1,4939$ (-111 %)
-10	$\lambda_1 = 0,2576$ (-967 %) $\lambda_2 = 0,3704$ (-101 %) $\lambda_3 = 1,9134$ (-171 %)	10	$\lambda_1 = 0,1654$ (-585,3 %) $\lambda_2 = 0,2301$ (-25,39 %) $\lambda_3 = 1,0950$ (-55,19 %)
-1	$\lambda_1 = 0,0241$ (0,05 %) $\lambda_2 = 0,1837$ (-0,14 %) $\lambda_3 = 0,7089$ (-0,46 %)	1	$\lambda_1 = 0,0248$ (-2,85 %) $\lambda_2 = 0,1849$ (-0,80 %) $\lambda_3 = 0,7157$ (-1,42 %)
-0,1	$\lambda_1 = 0,0241$ (0,11 %) $\lambda_2 = 0,1837$ (-0,11 %) $\lambda_3 = 0,7113$ (-0,81 %)	0,1	$\lambda_1 = 0,0242$ (-0,18 %) $\lambda_2 = 0,1838$ (-0,18 %) $\lambda_3 = 0,7120$ (-0,90 %)
-0,001	$\lambda_1 = 0,0241$ (-0,02 %) $\lambda_2 = 0,1837$ (-0,15 %) $\lambda_3 = 0,7116$ (-0,85 %)	0,001	$\lambda_1 = 0,0241$ (-0,02 %) $\lambda_2 = 0,1837$ (-0,15 %) $\lambda_3 = 0,7116$ (-0,85 %)
-0,000001	$\lambda_1 = 0,0241$ (-0,02 %) $\lambda_2 = 0,1837$ (-0,15 %) $\lambda_3 = 0,7116$ (-0,85 %)	0,000001	$\lambda_1 = 0,0241$ (-0,02 %) $\lambda_2 = 0,1837$ (-0,15 %) $\lambda_3 = 0,7116$ (-0,85 %)

Для иллюстрации точности применения подконструкций со свободными границами была рассчитана многопролетная балка с равномерно распределенной массой, дискретизированной в 71-й узловой точке ($N = 142$). Конденсация проводилась к 10 узлам (20 главных степеней свободы) с делением балки на 7 подконструкций. Результаты приведены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Результаты вычислений собственных значений СЗ

№ СЗ	Решение полной проблемы СЗ ($N = 142$)	ЧДК к 20 главным степеням свободы	№ СЗ	Решение полной проблемы СЗ ($N = 142$)	ЧДК к 20 главным степеням свободы
1	0,1862E-4	0,1862E-4 (0,00 %)	11	0,0634	0,06578 (-3,76 %)
2	0,1415E-3	0,1415E-3 (0,00 %)	12	0,0885	0,0909 (-2,77 %)
3	0,5439E-3	0,5444E-3 (-0,09 %)	13	0,12041	0,1285 (-6,69 %)
4	0,1486E-2	0,1490E-2 (-0,26 %)	14	0,16026	0,1680 (-4,85 %)
5	0,3316E-2	0,3355E-2 (-1,17 %)	15	0,20927	0,2204 (-5,34 %)
6	0,6470E-2	0,6593E-2 (-1,93 %)	16	0,26876	0,2746 (-2,17 %)
7	0,01146	0,01150 (-0,36 %)	17	0,34011	0,3204 (5,81 %)
8	0,01892	0,0188 (0,58 %)	18	0,42482	0,4685 (-10,28 %)
9	0,02952	0,02933 (0,65 %)	19	0,52446	0,6073 (-15,80 %)
10	0,044	0,0461 (-4,65 %)	20	0,64071	0,7596 (-18,56 %)

Как видно из табл. 4, удалось точно определить 70 % из интересующего количества СЗ. Остальные СЗ вычислились приближенно.

Далее выполним сравнение точности нескольких предлагаемых модификаций метода частотно-динамической конденсации:

классический вариант со статической подготовкой парциальных систем [4];

метод одноуровневой частотно-динамической конденсации.

Рассмотрим схему системы перекрестных балок (СПБ), где все второстепенные степени свободы разделены на три независимых блока (рис. 1).

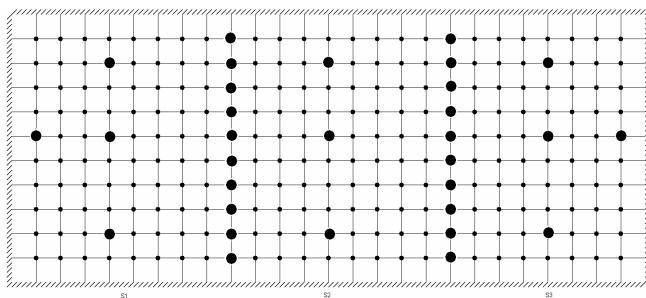


Рис. 1. Схема СПБ с разделением второстепенных степеней свободы на три блока

Результаты сравнения модифицированных версий ЧДК приведены в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

*Сравнение модифицированных методов ЧДК
в точности вычисления СЗ*

№ СЗ	Вариант ЧДК		№ СЗ	Вариант ЧДК	
	классический	одно-уровневый		классический	одно-уровневый
1	0,01838 (-0,160 %)	0,0175 (0,908 %)	17	0,516978 (18,513 %)	0,5570 (-2,603 %)
2	0,022702 (-0,644 %)	0,0180 (15,351 %)	18	0,571109 (17,447 %)	0,5578 (2,720 %)
3	0,035104 (2,613 %)	0,0323 (2,299 %)	19	0,582144 (18,217 %)	0,8243 (-38,101 %)
4	0,066097 (3,078 %)	0,0490 (19,392 %)	20	0,623543 (20,768 %)	0,9666 (-40,782 %)
5	0,118450 (10,518 %)	0,0649 (43,351 %)	21	0,681684 (25,877 %)	1,1502 (-66,731 %)
6	0,131355 (9,035 %)	0,1307 (-0,183 %)	22	0,711033 (24,293 %)	1,2942 (-54,570 %)
7	0,166001 (-9,528 %)	0,1317 (1,733 %)	23	0,753650 (32,570 %)	1,3239 (-49,604 %)
8	0,16894 (0,441 %)	0,1684 (-15,446 %)	24	0,806575 (31,248 %)	1,4304 (-43,287 %)
9	0,17592 (15,581 %)	0,1689 (2,731 %)	25	0,912609 (33,035 %)	1,4840 (-40,384 %)
10	0,22735 (7,606 %)	0,1868 (9,897 %)	26	0,913996 (39,820 %)	1,6796 (-28,045 %)
11	0,27429 (2,645 %)	0,3090 (-35,816 %)	27	1,059440 (36,125 %)	1,8413 (-35,102 %)

Окончание табл. 5

12	0,371645 (9,026 %)	0,3663 (-14,355 %)	28	1,173057 (30,164 %)	2,0648 (-51,098 %)
13	0,386415 (10,302 %)	0,4182 (-18,036 %)	29	1,303526 (23,318 %)	2,1571 (-57,499 %)
14	0,447712 (23,346 %)	0,4836 (-3,476 %)	30	1,481342 (16,301 %)	2,2901 (-66,136 %)
15	0,463814 (22,861 %)	0,4937 (1,182 %)	31	1,567688 (16,275 %)	2,2901 (-54,126 %)
16	0,504347 (17,588 %)	0,4991 (0,808 %)			

Обе модификации позволяют точно определить только 30 % из интересующего количества СЗ. Для увеличения точности вычисления достаточно увеличить количество главных степеней свободы.

Предыдущие тестовые примеры не могут быть использованы для тестирования метода многоуровневой динамической конденсации, так как везде выполнялось одноуровневое разделение на подконструкции. Далее рассмотрим второй тестовый пример, в котором выполняется определение СЗ на двумерной балочной системе, состоящей из перекрестных балок.

В расчетах были приняты следующие упрощения:

масса всей СПБ равномерно распределена по балочным КЭ и дискретизирована в 81-й узловой точке;

узловые массы вызывают при колебаниях инерционные силы только по направлениям линейных перемещений Δz и углов поворота φ_x и φ_y .

На рис. 2 представлено несколько вариантов разделения на подконструкции.

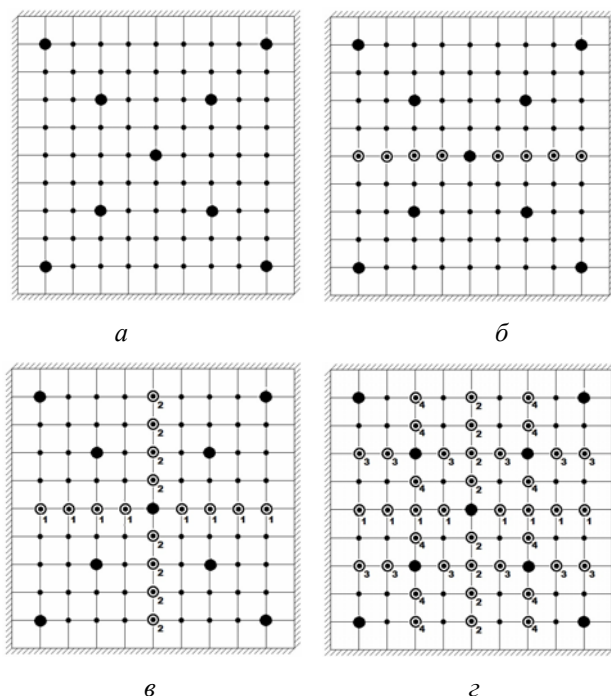


Рис. 2. Схемы разделения СПБ на подконструкции: *a* — исходная 9×9 СПБ; *b* — 2 подконструкции; *v* — 4 подконструкции; *z* — 16 подконструкций

Точные СЗ исходной СПБ представлены в табл. 6.

Т а б л и ц а 6

Точные СЗ исходной СПБ (2 а)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
СЗ	0,0501	0,2152	0,2152	0,3806	0,7556	0,7556	0,9215	0,9215	1,4646

В табл. 7 приведены результаты исследования нескольких способов формирования матриц жесткости и масс подконструкций (для нахождения СЗ использовался одноуровневый способ сборки подконструкций):

1) без учета соседних подконструкций — матрицы генерируются из отдельных подконструкций «как есть»;

2) с учетом смежных подконструкций — матрицы генерируются из подконструкций с предварительной статической подготовкой границ:

а) к степеням свободы граничных узлов каждой подконструкции предварительно выполняется статическая конденсация степеней свободы всех смежных подконструкций;

б) к степеням свободы граничных узлов подконструкции предварительно выполняется статическая конденсация всех степеней свободы подконструкций, смежных только на текущем уровне сборки (только для многоуровневого способа сборки подконструкций).

Т а б л и ц а 7

Сравнение способов генерации матриц подконструкций для схемы 5b

№ СЗ	Полученные СЗ (погрешность, %)	
	Метод генерации матриц подконструкций	
	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних конструкций (2а)
1	0,0503 (0,435 %)	0,0500 (0,081 %)
2	0,2164 (-0,543 %)	0,2136 (0,735 %)
3	0,2258 (-4,917 %)	0,2160 (-0,384 %)
4	0,3893 (-2,306 %)	0,3844 (-1,005 %)
5	0,7261 (3,897 %)	0,6781 (10,257 %)
6	0,9130 (-20,833 %)	0,8807 (-16,554 %)
7	0,9873 (-7,139 %)	0,8969 (2,675 %)
8	1,0340 (-12,203 %)	1,0681 (-15,899 %)
9	1,9205 (-31,125 %)	1,3290 (9,263 %)

Результаты показывают, что учет смежной подконструкции при формировании матриц позволяет уточнить некоторые СЗ.

Далее сравним схемы 5с и 5d, позволяющие сравнить одноуровневый и многоуровневый способы сборки подконструкций.

Так как для балочных систем инерционные силы, вызванные по направлению линейных перемещений узловых масс, во много раз превосходят инерцию по направлению углов поворота масс (соответствующие диагональные элементы в матрице распределенных масс имеют соотношения $78\rho F\ell / \rho F\ell_3$), то также исследовалось несколько вариантов порядка исключения поворотных степеней свободы:

1) с исключением «поворотных» степеней свободы после выполнения конденсации;

2) с предварительным исключением всех поворотных степеней свободы внутри каждой из подконструкций перед выполнением конденсации. Редуцированная к главным степеням матрица жесткости вычисляется отдельно;

3) с исключением поворотных степеней свободы в процессе конденсации. На всех этапах сборки матрица жесткости содержит блоки, соответствующие всем степеням свободы рассматриваемой подконструкции. При выполнении конденсации используется редуцированный вариант матрицы жесткости, соответствующий степеням свободы, связанными только с линейными перемещениями узлов.

Результаты сравнения порядка исключения поворотных степеней свободы для схемы 5с приведены в табл. 8—10.

Т а б л и ц а 8

Сравнение способов сборки подконструкций для схемы 5с с исключением поворотных степеней свободы после выполнения конденсации

№ СЗ	Полученные СЗ (погрешность, %)					
	Метод сборки подконструкций					
	многоуровневый			одноуровневый		
	Метод генерации матриц подконструкций					
	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2а)	с учетом соседних подконструкций (вар. 2б)	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2а)	с учетом соседних подконструкций (вар. 2б)
1	-27,6586 (> 100 %)	-5,6937 (> 100 %)	-19,5447 (> 100 %)	0,0487 (2,738 %)	0,2751 (> 100,0 %)	0,0501 (0,014 %)
2	-4,2865 (> 100 %)	-3,1071 (> 100 %)	-4,1306 (> 100 %)	0,2165 (-0,616 %)	0,3028 (-40,70 %)	0,2147 (0,250 %)
3	-0,0543 (> 100 %)	0,0360 (83,253 %)	-0,0562 (> 100 %)	0,2239 (-4,040 %)	0,3294 (-53,03 %)	0,2163 (-0,508 %)
4	0,0463 (87,830 %)	0,1847 (51,453 %)	0,0431 (88,670 %)	0,3934 (-3,368 %)	0,4704 (-23,6 %)	0,3932 (-3,321 %)
5	0,0505 (93,313 %)	0,2051 (72,853 %)	0,0514 (93,196 %)	0,7705 (-1,969 %)	0,6893 (8,774 %)	0,7498 (0,763 %)
6	0,2707 (64,172 %)	0,3684 (51,242 %)	0,2586 (65,769 %)	0,8978 (-18,82 %)	0,8281 (-9,59 %)	0,7888 (-4,39 %)
7	0,2885 (68,694 %)	0,4389 (52,369 %)	0,3228 (64,971 %)	0,8978 (2,571 %)	1,0596 (-14,98 %)	0,9994 (-8,45 %)
8	0,3625 (60,668 %)	0,7857 (14,736 %)	0,4330 (53,015 %)	1,0059 (-9,154 %)	1,2651 (-37,2 %)	1,0050 (-9,06 %)
9	0,6106 (58,308 %)	0,9347 (36,181 %)	0,7474 (48,971 %)	1,2119 (17,259 %)	1,7874 (-22,03 %)	1,5718 (-7,318 %)
Сред. знач., %	> 100	> 100	> 100	6,72	73,3	3,78

Т а б л и ц а 9

Сравнение способов сборки подконструкций для схемы 5с
с предварительным исключением поворотных степеней свободы

№ СЗ	Полученные СЗ (погрешность, %)					
	Метод сборки подконструкций					
	многоуровневый			одноуровневый		
	Метод генерации матриц подконструкций					
	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2a)	с учетом соседних подконструкций (вар. 2b)	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2a)	с учетом соседних подконструкций (вар. 2b)
1	0,0535 (-6,966 %)	0,0425 (15,074 %)	0,0535 (-6,86 %)	0,0546 (-8,991 %)	0,0377 (24,752 %)	0,0546 (-9,069 %)
2	0,2118 (1,607 %)	0,2113 (1,807 %)	0,2118 (1,582 %)	0,2118 (1,610 %)	0,2113 (1,806 %)	0,2101 (2,395 %)
3	0,2428 (-12,821 %)	0,2404 (-11,70 %)	0,2414 (-12,15 %)	0,2118 (1,608 %)	0,2177 (1,159 %)	0,2118 (1,582 %)
4	0,3979 (-4,547 %)	0,2926 (23,103 %)	0,4003 (-5,195 %)	0,3815 (0,255 %)	0,3341 (12,212 %)	0,3745 (1,586 %)
5	0,4143 (45,171 %)	0,3156 (58,237 %)	0,4073 (46,096 %)	0,3994 (47,141 %)	0,4825 (36,141 %)	0,4008 (46,953 %)
6	0,4152 (45,047 %)	0,3920 (48,115 %)	0,4153 (45,043 %)	0,5926 (21,573 %)	0,5424 (28,215 %)	0,5814 (23,056 %)
7	0,5926 (35,693 %)	0,5117 (44,477 %)	0,5966 (35,255 %)	0,5926 (35,690 %)	0,5439 (40,983 %)	0,5959 (35,336 %)
8	0,9623 (-4,427 %)	0,5710 (38,033 %)	0,9462 (-2,672 %)	0,7784 (15,529 %)	0,5703 (38,111 %)	0,7593 (17,609 %)
9	1,7959 (-22,61 %)	0,8687 (40,690 %)	1,6585 (-13,2 %)	1,2601 (13,965 %)	0,9314 (36,405 %)	1,2665 (13,532 %)
Сред. знач., %	19,87	31,24	18,67	16,26	24,4	16,79

Т а б л и ц а 10

Сравнение способов сборки подконструкций для схемы 5с
с исключением поворотных степеней свободы в процессе конденсации

№ СЗ	Полученные СЗ (погрешность, %)					
	Метод сборки подконструкций					
	многоуровневый			одноуровневый		
	Метод генерации матриц подконструкций					
	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2a)	с учетом соседних подконструкций (вар. 2b)	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2a)	с учетом соседних подконструкций (вар. 2b)
1	0,0518 (-3,530 %)	0,0186 (62,920 %)	0,0492 (1,619 %)	0,0529 (-5,604 %)	0,0554 (-10,627 %)	0,0506 (-1,073 %)
2	0,2249 (-4,492 %)	0,1988 (7,610 %)	0,2290 (-6,409 %)	0,2081 (3,329 %)	0,2451 (-13,905 %)	0,2023 (6,009 %)

О к о н ч а н и е т а б л. 10

3	0,2500 (-16,14 %)	0,2377 (-10,460 %)	0,2317 (-7,671 %)	0,2411 (-12,043 %)	0,2740 (-27,316 %)	0,2317 (-7,664 %)
4	0,3977 (-4,508 %)	0,2560 (32,738 %)	0,4187 (-10,03 %)	0,3977 (-4,517 %)	0,3405 (10,520 %)	0,4188 (-10,1 %)
5	0,7667 (-1,465 %)	0,4205 (44,346 %)	0,6393 (15,388 %)	0,8525 (-12,830 %)	0,4598 (39,145 %)	0,6854 (9,292 %)
6	0,9387 (-24,24 %)	0,5545 (26,611 %)	0,6533 (13,539 %)	1,0792 (-42,830 %)	0,5151 (31,824 %)	0,9155 (-21,16 %)
7	1,0577 (-14,77 %)	0,6041 (34,450 %)	0,8726 (5,306 %)	1,2330 (-33,796 %)	0,5782 (37,258 %)	1,1147 (-20,96 %)
8	1,3806 (-49,82 %)	0,6049 (34,355 %)	1,3329 (-44,6 %)	1,3207 (-43,317 %)	0,6948 (24,600 %)	1,1772 (-27,74 %)
9	1,4191 (3,111 %)	0,6803 (53,553 %)	1,3696 (6,492 %)	1,8863 (-28,787 %)	0,7324 (49,995 %)	1,3106 (10,519 %)
Сред. знач., %	13,56	34,12	12,34	20,78	27,24	12,72

Результаты, полученные в табл. 8—10, показывают, что порядок исключения поворотных степеней свободы сильно влияет на процесс конденсации и точность полученных результатов. Исключение блоков матриц, содержащих малые по значению элементы, соответствующие поворотным степеням свободы, возможно не всегда. Конденсация, выполняемая с предварительным исключением поворотных степеней свободы (вар. 2 и 3), позволяет получать стабильные, но менее точные результаты при обоих способах сборки подконструкций. Учет смежных подконструкций по варианту 2b в некоторых случаях приводит к более точным результатам.

Результаты сравнения порядка исключения поворотных степеней свободы для схемы 5d приведены в табл. 11—12.

Т а б л и ц а 11

*Сравнение способов сборки подконструкций для схемы 5d
с исключением поворотных степеней свободы после выполнения конденсации*

№ СЗ	Полученные СЗ (погрешность, %)			
	Метод сборки подконструкций			
	многоуровневый		одноуровневый	
	Метод генерации матриц подконструкций			
	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2b)	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2b)
1	0,0366 (26,886 %)	0,0198 (60,349 %)	0,0502 (-0,34 %)	0,0441 (11,968 %)
2	0,0762 (64,604 %)	0,0242 (88,762 %)	0,2139 (0,610 %)	0,1454 (32,430 %)
3	0,1450 (32,634 %)	0,0286 (86,731 %)	0,2150 (0,103 %)	0,1879 (12,697 %)
4	0,3347 (12,051 %)	0,0311 (91,827 %)	0,3797 (0,216 %)	0,2833 (25,549 %)
5	0,3651 (51,674 %)	0,0606 (91,985 %)	0,7339 (2,873 %)	0,5242 (30,626 %)
6	0,4734 (37,347 %)	0,0903 (88,054 %)	0,7549 (0,086 %)	0,5561 (26,396 %)

Окончание табл. 11

7	0,6517 (29,285 %)	0,2321 (74,813 %)	0,9195 (0,220 %)	0,6396 (30,598 %)
8	0,8679 (5,825 %)	0,2679 (70,924 %)	0,9256 (-0,44 %)	0,7594 (17,596 %)
9	0,9748 (33,445 %)	0,3792 (74,110 %)	1,4952 (-2,09 %)	0,8026 (45,205 %)
Сред. знач., %	32,64	80,84	0,77	25,89

Таблица 12

Сравнение способов сборки подконструкций для схемы 5d
с исключением поворотных степеней свободы в процессе конденсации

№ СЗ	Полученные СЗ (погрешность, %)			
	Метод сборки подконструкций			
	многоуровневый		одноуровневый	
	Метод генерации матриц подконструкций			
	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2b)	без учета соседних подконструкций	с учетом соседних подконструкций (вар. 2b)
1	0,0299 (40,193 %)	—	0,0528 (-5,395 %)	—
2	0,0397 (81,544 %)	—	0,2428 (-12,833 %)	—
3	0,1366 (36,507 %)	—	0,2428 (-12,838 %)	—
4	0,4147 (-8,981 %)	—	0,4642 (-21,974 %)	—
5	0,7707 (-2,004 %)	—	0,9108 (-20,540 %)	—
6	0,8024 (-6,196 %)	—	0,9352 (-23,768 %)	—
7	0,9689 (-5,144 %)	—	1,2245 (-32,878 %)	—
8	1,2596 (-36,687 %)	—	1,2255 (-32,983 %)	—
9	1,7962 (-22,634 %)	—	2,1188 (-44,660 %)	—
Сред. знач., %	26,65	—	23,09	—

Сравнение результатов, полученных для схем 5c и 5d, показывает, что при увеличении уровней разделения подконструкций ухудшается точность вычислений СЗ методом многоуровневой конденсации.

Заключение. Анализ предлагаемых алгоритмов и результаты проведенных расчетов позволяют сделать следующие выводы:

1. Одноуровневый способ ЧДК с исключением поворотных степеней свободы после выполнения конденсации позволяет вычислять нужное количество СЗ с требуемой степенью точности. Размер подконструкций, на которые разделяется исходная расчетная модель, а также размер собранной подконструкции все еще может оставаться большим.

2. Многоуровневый способ ЧДК с исключением поворотных степеней свободы в процессе конденсации позволяет построить весь расчетный процесс из действительно небольших подсистем, но с увеличением уровней вложенности подконструкций точность вычисления СЗ заметно ухудшается.

Многоуровневый способ конденсации требует доработки, которая заключается в модификации схемы сборки подконструкций и добавлении процедуры уточнения СЗ на каждом уровне.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bate K., Vilson E.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / пер. с англ. ; под ред. А. Ф. Смирнова. М, 1982. 448 с.
2. *Игнатьев В. А.* Редукционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем. Саратов : СГУ, 1992. 142 с.
3. *Игнатьев В. А., Ромашкин В. Н.* Последовательная частотно-динамическая конденсация / Материалы науч.-техн. Интернет-конференции. Волгоград, ВолгГАСУ, 2010. С. 63—87.
4. *Игнатьев В. А., Макаров А. В.* Решение неполной алгебраической проблемы собственных векторов и собственных значений для задач динамики и устойчивости методом частотно-динамической конденсации // Строительная механика и расчет сооружений. 2005. № 1. С. 14—20.
5. *Guyan R. J.* Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. № 2. p. 380.
6. *Фиалко С. Ю.* Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах. М. : СКАД СОФТ, 2009. 158 с.
7. *Пржемыцкий Е. С.* Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур // Ракетная техника и космонавтика. 1963. № 1. С. 88—95.
8. *Сапожников А. И.* Методы суперэлементов в статике и динамике панельных зданий // Строительство и архитектура. 1980. С. 33—37.
9. *Craig R. R., Bampton M. C.* Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. P. 1313—1319.
10. *Leung Y. T.* Multilevel dynamic substructures // Computers and structures. 2011. Vol. 89. P. 302—315.
11. *Xian L.* Simplified dynamic condensation in multi-substructure systems // Computers and structures. 1988. Vol. 30. P. 851—854.
12. *Bennighof J. K., Lehoucq R. B.* An automated multilevel substructuring method for eigen-space computation in linear elastodynamics // SIAM Journal on computing. 2004. Vol. 25.
13. *Kim C. W.* Analysis of vibration levels of large structural system with recursive component mode synthesis method: theory and convergence // Proceedings of the Institution of mechanical engineers. 2006. Vol. 220. P. 139. P. 2084—2106.
14. *Ивантеев В. И., Чубань В. Д.* Расчет форм и частот свободных колебаний конструкций методом многоуровневой динамической конденсации // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. XV. № 4.
15. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений / пер. с англ. М., 1984. 333 с.
1. *Bate K., Vilson E.* Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov / per. s angl. ; pod red. A. F. Smirnova. M, 1982. 448 s.
2. *Ignat'ev V. A.* Reduktsionnyye metody rascheta v statike i dinamike plastinchatykh sistem. Saratov : SGU, 1992. 142 s.
3. *Ignat'ev V. A., Romashkin V. N.* Posledovatel'naya chastotno-dinamicheskaya kondensatsiya / Materialy nauch.-tekhn. Internet-konferentsii. Volgograd, VolgGASU, 2010. S. 63—87.
4. *Ignat'ev V. A., Makarov A. V.* Reshenie nepolnoy algebraicheskoy problemy sobstvennykh vektorov i sobstvennykh znacheniy dlya zadach dinamiki i ustoychivosti metodom chastotno-dinamicheskoy kondensatsii // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2005. № 1. S. 14—20.
5. *Guyan R. J.* Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. № 2. p. 380.
6. *Fialko S. Yu.* Pryamyie metody resheniya sistem lineynykh uravneniy v sovremennykh MKE-kompleksakh. M. : SKAD SOFT, 2009. 158 s.
7. *Przhemnit'skiy E. S.* Matrichnyy metod issledovaniya konstruksiy na osnove analiza podstruktur // Raketnaya tekhnika i kosmonavtika. 1963. № 1. S. 88—95.
8. *Sapozhnikov A. I.* Metody superelementov v statike i dinamike panel'nykh zdaniy // Stroitel'stvo i arkhitektura. 1980. S. 33—37.
9. *Craig R. R., Bampton M. C.* Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. P. 1313—1319.
10. *Leung Y. T.* Multilevel dynamic substructures // Computers and structures. 2011. Vol. 89. P. 302—315.
11. *Xian L.* Simplified dynamic condensation in multi-substructure systems // Computers and structures. 1988. Vol. 30. P. 851—854.
12. *Bennighof J. K., Lehoucq R. B.* An automated multilevel substructuring method for eigen-space computation in linear elastodynamics // SIAM Journal on computing. 2004. Vol. 25.

13. *Kim C. W.* Analysis of vibration levels of large structural system with recursive component mode synthesis method: theory and convergence // Proceedings of the Institution of mechanical engineers. 2006. Vol. 220. P. 139. P. 2084—2106.

14. *Ivanteev V. I., Chuban' V. D.* Raschet form i chastot svobodnykh kolebaniy konstruktsey metodom mnogourovnevnoy dinamicheskoy kondensatsii // Uchenye zapiski TsAGI. 1984. T. XV. № 4.

15. *Dzhordzh A., Lyu Dzh.* Chislennoe reshenie bol'shikh razrezhenykh sistem uravneniy / per. s angl. M., 1984. 333 s.

© Ромашкин В. Н., 2013

*Поступила в редакцию
в январе 2013 г.*

Ссылка для цитирования:

Ромашкин В. Н. Суперэлементная формулировка метода частотно-динамической конденсации // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2013. Вып. 1(25). URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1\(25\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1(25).pdf)