

УДК 624.042.8: 534.014.5

И. А. Петров, М. В. Осипова**О ДВУХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

Анализируются два метода расчета систем с некоторыми типами физической и конструктивной нелинейности на произвольные динамические воздействия. Один из методов применим для расчета широкого класса систем, другой — для некоторых частных случаев. Методы иллюстрируются на примере расчета системы с выключающейся связью.

К л ю ч е в ы е с л о в а: нелинейные колебания, нелинейные системы, динамическое воздействие, вынужденные колебания, выключающаяся связь, «фиктивная» нагрузка.

Two methods of analysis of systems with different types of physical and structural nonlinearity on derived dynamic processes are considered in the article. One of the methods can be used for calculation of a wide range of systems, while the other one can be used for some particular cases. The methods are illustrated by the example of calculation of the system with disabled constraint.

Key words: nonlinear vibrations, nonlinear systems, dynamic loading, forced vibrations, disabled constraints, fictitious load.

Цель настоящей статьи — анализ, разработка алгоритмов и программ расчета нелинейных систем с одной степенью свободы, в частности систем с выключающейся связью, на произвольные динамические воздействия.

Рассмотрим 2 метода анализа:

I метод, более общий, можно определить как численно-аналитический, основанный на решении интегральных уравнений второго рода, к которым сводятся нелинейные уравнения движения;

II метод, аналитический, более удобен для расчета систем с ломаными характеристиками и выключающимися связями.

Оба метода иллюстрируются на примере расчета системы с одной степенью свободы с выключающейся связью.

I метод. Алгоритм и программа расчета разработаны на основе работ [1, 2]. Рассматривается система с одной степенью свободы при достаточно общем типе физической нелинейности. Уравнение движения такой системы запишем в виде:

$$m\ddot{z} + R_d(z) = q(t), \quad (1)$$

$$\text{где } R_d(z) = \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) R(z) — \quad (2)$$

полная реакция системы с учетом диссипативных сил; $R(z)$ — упругая реакция системы; $\nu_1 = \frac{n_1}{p_1^2}$ — диссипативный коэффициент; $q(t)$ — внешняя нагрузка.

Упругой реакции линейной системы $R(z) = k_1 z$ соответствует полная реакция

$$R_d(z) = \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) k_1 z. \quad (3)$$

Оставив в левой части некоторый линейный оператор, полные реакции в котором определяются по формуле (3), уравнение после некоторых преобразований перепишем в виде

$$\ddot{z} + 2n_1 \dot{z} + p_1^2 z = \frac{q(t)}{m} + \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{dt}\right) f(z), \quad (4)$$

$$\text{где } f(z) = \frac{1}{m} [k_1 z - R(z)], \quad (5)$$

$f(z)$ — «фиктивная» нагрузка; k_1 — начальная жесткость системы;

$p_1^2 = \frac{k_1}{m}$ — частота свободных колебаний линейной (порождающей) системы;

$2n_1 = \frac{\gamma}{\omega} p_1^2$ и $2n_1 = \gamma p_1$ — диссипативные коэффициенты, принятые, согласно модифицированной гипотезе Фойгта, соответственно при вынужденных и свободных колебаниях; γ — коэффициент внутреннего трения материала; ω — частота внешней нагрузки.

Решение уравнения (4) можно записать в виде интегралов Дюамеля [2, 3]:

$$z(t) = z_{\text{lin}}(t) + w(t), \quad (6)$$

где

$$z_{\text{lin}}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t q(\tau) V_1(p_1^*, t - \tau) d\tau + e^{-n_1 t} \left(z_{\text{lin}0} \cos p_1^* t + \frac{\dot{z}_{\text{lin}0} + z_{\text{lin}0} n_1}{p_1^*} \sin p_1^* t \right) \quad (7)$$

перемещение в исходной линейной системе от внешней нагрузки $q(t)$, начального смещения $z_{\text{lin}0}$ и скорости $\dot{z}_{\text{lin}0}$;

$$w(t) = \int_0^t \left(1 + 2\nu_1 \frac{d}{d\tau}\right) f[z(\tau)] V_1(p_1^*, t - \tau) d\tau \quad (8)$$

перемещение в исходной линейной системе от «фиктивной» нагрузки, зависящей от нелинейной реакции системы;

$$V_1(p_1^*, t) = \frac{1}{p_1^*} e^{-n_1 t} \sin p_1^* t \quad (9)$$

импульсная переходная функция линейной (порождающей) системы;

$p_1^* = p_1 \sqrt{1 - (\nu_1 p_1)^2}$ — частота свободных колебаний с учетом диссипации.

Выполнив в (8) интегрирование по частям, с некоторыми допущениями можно записать

$$w(t) = \int_0^t f[z(\tau)] V_2(p_1^*, t - \tau) d\tau, \quad (10)$$

$$\text{где } V_2(p_1^*, t) = \frac{e^{-n_1 t}}{p_1^*} (B_0 \sin p_1^* t + D_0 \cos p_1^* t) \quad (11)$$

импульсная переходная функция для «фиктивной» нагрузки. Значения коэффициентов определяются по формулам $B_0 = 1 - 2\nu_1 n_1$, $D_0 = 2\nu_1 p_1^*$ и $B_0 = 1 - \frac{\gamma^2}{2}$, $D_0 = \gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$ соответственно при вынужденных и свободных колебаниях.

Начальные условия $z_{\text{lin}0}$, $\dot{z}_{\text{lin}0}$ можно принять равными нулю, не снижая при этом общности решения. Формула (6) в этом случае примет вид

$$z(t) = z_{\text{lin}}(t) + w(t) = \frac{1}{m} \int_0^t q(\tau) V_1(p_1^*, t - \tau) d\tau + \int_0^t f[z(\tau)] V_2(p_1^*, t - \tau) d\tau. \quad (12)$$

При вычислении интегралов (12) импульсные переходные функции удобно разделить на составляющие, зависящие только от t или τ . Используя формулу синуса разности двух углов, можно записать:

$$z_{\text{lin}}(t) = \frac{1}{mp_1^*} \{A(t)d_1(t) - B(t)d_2(t)\}, \quad (13)$$

$$\text{где } A(t) = \int_0^t q(\tau) e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau, \quad B(t) = \int_0^t q(\tau) e^{n_1 \tau} \sin p_1^* \tau d\tau, \quad (14)$$

$$d_1(t) = e^{-n_1 t} \sin p_1^* t; \quad d_2(t) = e^{-n_1 t} \cos p_1^* t. \quad (15)$$

$$w(t) = \frac{1}{p_1^*} \{F_2(t)[B_0 d_1(t) + D_0 d_2(t)] - F_1(t)[B_0 d_2(t) - D_0 d_1(t)]\}, \quad (16)$$

$$\text{где } F_1(t) = \int_0^t f[z(\tau)] e^{n_1 \tau} \sin p_1^* \tau d\tau; \quad F_2(t) = \int_0^t f[z(\tau)] e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau; \quad (17)$$

$d_1(t)$, $d_2(t)$ — по формуле (15); B_0 , D_0 — по формуле (11).

Интегралы (14), (17) вычисляются на каждом шаге по времени и суммируются со значениями интегралов, вычисленных на предыдущих шагах (рис. 1):

$$A(\Delta t_1) = \int_0^{\Delta t_1} q(\tau) e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau, \quad A(\Delta t_2) = A(\Delta t_1) + \int_{\Delta t_1}^{\Delta t_2} q(\tau) e^{n_1 \tau} \cos p_1^* \tau d\tau \dots \quad (18)$$

Нелинейное интегральное уравнение (12) решается на каждом шаге по времени с помощью итераций. На первом шаге по времени (т. е. $i = 1$, $t = \Delta t_1$) для первой итерации принимается, что полное перемещение равно линейному перемещению, т. е. $z(\Delta t_1)_1 = z_{\text{lin}}(\Delta t_1)$. Затем вычисляется значение «фиктивной» нагрузки $f[z(\Delta t_1)_1]$, вспомогательных функций $F_1(\Delta t_1)_1$, $F_2(\Delta t_1)_1$ и определяется перемещение от «фиктивной» нагрузки на первой итерации $w(\Delta t_1)_1$. Во второй итерации уточняется значение полного перемещения $z(\Delta t_1)_u = z_{\text{lin}}(\Delta t_1) + w(\Delta t_1)_{u-1}$ ($u = 2$). Итерации на шаге по времени производятся, пока не выполнится условие

$$\left| \frac{w(\Delta t_1)_u - w(\Delta t_1)_{u-1}}{w(\Delta t_1)_u} \right| \leq \varepsilon, \quad (19)$$

где ε — допустимая погрешность; u — номер итерации.

Обозначим $u = u_{ok}$ номер итерации, при котором условие (19) выполняется. Полное перемещение на первом шаге по времени определяется как $z(\Delta t_1) = z_{\text{lin}}(\Delta t_1) + w(\Delta t_1)_{u_{ok}}$. На втором и последующих шагах по времени ($i > 1$, $t = \Delta t_i$) в качестве первого приближения следует принять $z(\Delta t_i)_1 = z_{\text{lin}}(\Delta t_i) + w(\Delta t_{i-1})_{u_{ok}}$. Порядок расчета для последующих итераций аналогичен.

В примере расчета интегралы (14) и (17) определяются с помощью использования одного из методов численного интегрирования — метода трапеций. Этот метод при малом шаге интегрирования дает небольшую погрешность относительно аналитического решения, что будет показано в примере расчета. Геометрическое представление метода трапеций показано на рис. 2. Интеграл на i -м шаге по времени вычисляется по формуле:

$$B(\Delta t_i) = B(\Delta t_{i-1}) + \frac{q(\Delta t_{i-1})e^{n_1\Delta t_{i-1}} \sin p_1^* \Delta t_{i-1} + q(\Delta t_i)e^{n_1\Delta t_i} \sin p_1^* \Delta t_i}{2} (\Delta t_i - \Delta t_{i-1}). \quad (20)$$

Шаг по времени удобно принять постоянным, т. е. $\Delta t = \Delta t_i - \Delta t_{i-1}$.

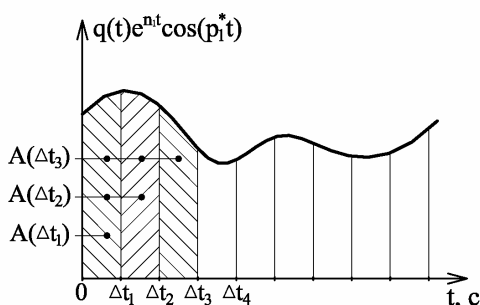


Рис. 1. Схема численного интегрирования

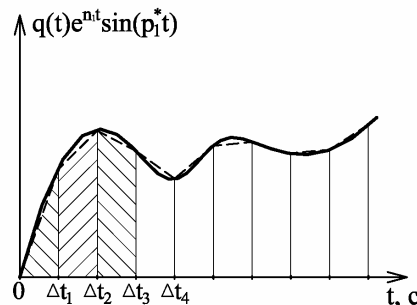


Рис. 2. Схема интегрирования методом трапеций

На рис. 3 приведен график зависимостей реакция — смещение для трех типов физической (конструктивной) нелинейности систем виброизоляции: ломаная характеристика (прямые 1 и 3), выключающаяся связь (прямые 1 и 2) и частный случай гладкой кривой — кубическая зависимость (кривая 4).

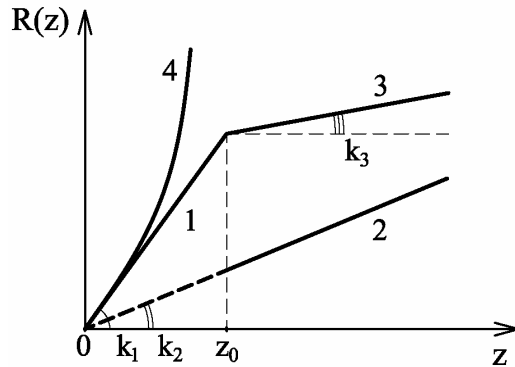


Рис. 3. Зависимость реакция — смещение для различных типов нелинейности

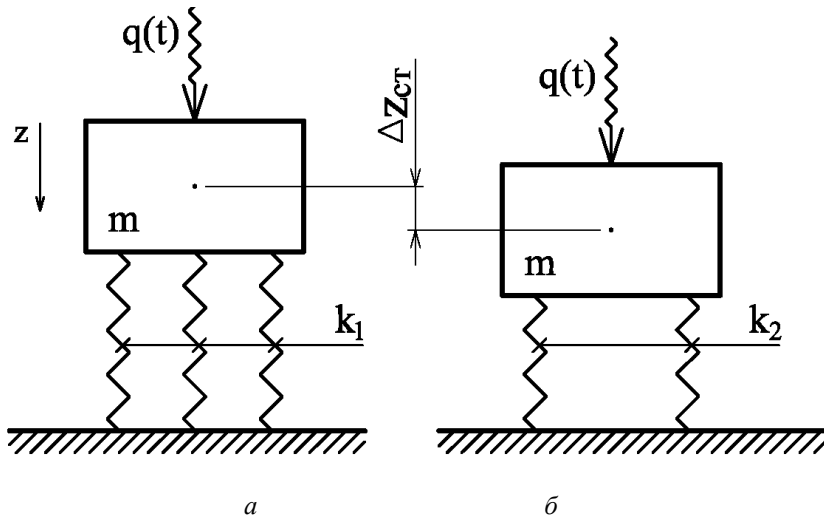


Рис. 4. Система с одной степенью свободы

Определим упругую реакцию системы и «фиктивную» нагрузку по формуле (5) и рис. 3:

при симметричной ломаной характеристике

$$R(z) = k_1 z, \quad f(z) = 0 \quad \text{при } |z| \leq z_0;$$

$$R(z) = k_1 z_0 + k_3 (z - z_0), \quad f(z) = \frac{1}{m} (k_1 - k_3) (z - z_0) \quad \text{при } z > z_0; \quad (21)$$

$$R(z) = -k_1 z_0 + k_3 (z + z_0), \quad f(z) = \frac{1}{m} (k_1 - k_3) (z + z_0) \quad \text{при } z < -z_0;$$

для систем с выключающейся связью

$$R(z) = k_1 z, \quad f(z) = 0 \quad \text{при } t < t_0; \quad (22)$$

$$R(z) = k_2(z - \Delta z_{\text{ст}}), \quad f(z) = \frac{1}{m}[(k_1 - k_2)z + k_2 \Delta z_{\text{ст}}] \quad \text{при } t \geq t_0,$$

где t_0 — момент времени выключения связи; z_0 — перемещение массы при $t = t_0$; $\Delta z_{\text{ст}}$ — смещение центра тяжести системы в результате выключения связи (рис. 4);

при симметричной кубической зависимости

$$R(z) = k_1(1 \pm \alpha z^2)z, \quad f(z) = \mp p_1^2 \alpha z^3. \quad (23)$$

II метод подробно рассмотрен в [4, 5]. Колебания нелинейной системы последовательно рассчитываются на нескольких временных участках, в которых система является линейной (с соответствующими жесткостными характеристиками). В частности, для случая выключающейся связи система рассматривается на двух временных участках: до (рис. 4, а) и после (рис. 4, б) выключения связи (обозначим их «система 1» и «система 2» соответственно).

Запишем уравнение движения системы 1:

$$\ddot{z}_1 + 2n_1 \dot{z}_1 + p_1^2 z_1 = q(t)/m. \quad (24)$$

Решение уравнения (24) при нулевых начальных условиях можно записать в виде интеграла Дюамеля:

$$z_1(t) = \frac{1}{m} \int_0^t q(\tau) V_1(p_1^*, t - \tau) d\tau. \quad (25)$$

Определим начальные условия для системы 2. Начальное перемещение массы равно сумме смещения центра тяжести системы в результате выключения связи (рис. 4)

$$\Delta z_{\text{см}} = mg \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) = mg \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} \right) \quad (26)$$

и динамического перемещения массы в системе 1 в момент выключения связи. Начальная скорость массы в системе 2 равна скорости массы в системе 1 в момент выключения связи. Таким образом, можно записать выражения для начальных условий колебаний системы 2:

$$z_{20} = z_1(t_0) - \Delta z_{\text{ст}}, \quad \dot{z}_{20} = \dot{z}_1(t_0), \quad (27)$$

где t_0 — время выключения связи.

Уравнение движения для системы 2 имеет вид:

$$\ddot{z}_2 + 2n_2 \dot{z}_2 + p_2^2 z_2 = q(t)/m. \quad (28)$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий определим по формуле

$$z_2(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t q(\tau) V_1(p_2^*, t - \tau) d\tau + e^{-n_2(t-t_0)} \left(z_{20} \cos[p_2^*(t-t_0)] + \frac{\dot{z}_{20} + z_{20} n_2}{p_2^*} \sin[p_2^*(t-t_0)] \right). \quad (29)$$

Запишем общее решение для системы с выключающейся связью:

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t), & t < t_0 \\ z_2(t), & t \geq t_0 \end{cases} \quad (30)$$

В качестве **примера расчета** система с одной степенью свободы (рис. 4) с выключающейся связью была рассчитана двумя методами.

Исходные данные: $m = 10$ т — масса установки; $k_1 = 0,98 \cdot 10^4$ кН/м и $k_2 = 0,6 \cdot 10^4$ кН/м — жесткости системы до и после выключения связи; $\gamma = 0,05$ — коэффициент внутреннего трения материала; $q(t) = Q_0 \sin(\omega t)$, $Q_0 = 50$ кН, $\omega = 62$ рад/с — соответственно закон изменения, амплитуда и частота внешней нагрузки; $t_0 = 4,025$ с — время выключения связи.

При расчете системы **методом I** функция «фиктивной» нагрузки для системы с выключающейся связью будет иметь вид (22):

$$f(z) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{1}{m} [(k_1 - k_2)z + k_2 \Delta z_{\text{ст}}], & t \geq t_0. \end{cases} \quad (31)$$

Смещение центра тяжести системы в результате выключения связи $\Delta z_{\text{ст}}$ определим по формуле (27):

$$\Delta z_{\text{ст}} = mg \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} \right) = 6,34 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Покажем также другой возможный алгоритм решения уравнения (4) с помощью метода I. Выражение для «фиктивной» нагрузки с учетом диссипативных сил по (31) имеет вид:

$$\left(1 + 2v_1 \frac{d}{dt} \right) f(z) = \frac{1}{m} [\Delta k z + k_2 \Delta z_{\text{ст}} + 2v_1 \Delta k \dot{z}], \quad (32)$$

где $\Delta k = k_1 - k_2$ — изменение жесткости системы.

Тогда решение уравнения (4) (при нулевых начальных условиях $z_{\text{lin}0}, \dot{z}_{\text{lin}0}$) получим в виде:

$$z(t) = \frac{1}{m} \int_0^t q(\tau) V_1(p_1^*, t - \tau) d\tau + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t [\Delta k z + k_2 \Delta z_{\text{ст}} + 2v_1 \Delta k \dot{z}] V_1(p_1^*, t - \tau) d\tau. \quad (33)$$

Интегралы (33) вычисляются на каждом шаге по времени методом трапеций с итерациями на каждом шаге по времени и суммируются со значениями интегралов, вычисленных на предыдущих шагах (см. рис. 1 и 2, формулы (18—20)). Шаг интегрирования Δt принят постоянным и равным $1/200$ периода вынужденных колебаний:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{200} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Для расчета по **методу II** необходимо использовать формулы (25), (29), (30), а также начальные условия (27). В этом случае интегралы Дюамеля вычислены аналитически.

Графики перемещений массы, полученные по методам I и II, приведены на рис. 5 [6].

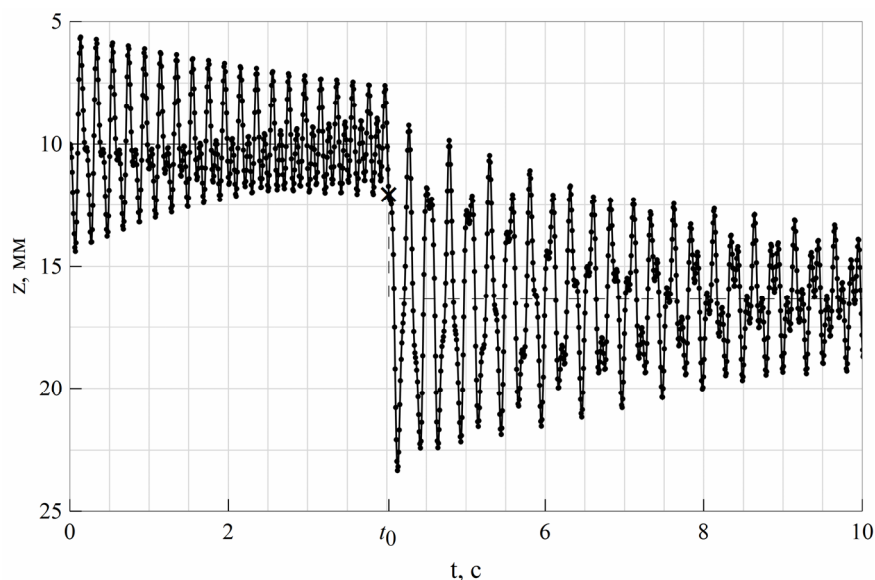


Рис. 5. Закон движения массы, определенный по методам I и II: толстая сплошная линия — решение по методу II, точка — по методу I; тонкая пунктирная линия — положение статического равновесия массы до и после выключения связи; знак $\times$ — время выключения связи

Рис. 5 показывает, что решения, полученные обоими методами, имеют малые расхождения. Погрешность численно-аналитического метода I относительно решения аналитического метода II определим по формуле

$$\Delta_i = \frac{z_{II_i} - z_{I_i}}{z_{II_i}} 100 \%, \quad (34)$$

где z_{I_i} , z_{II_i} — перемещение в i -й момент времени, вычисленное соответственно по I и II методам.

На рис. 6 представлен график изменения значения погрешности Δ_i во времени.

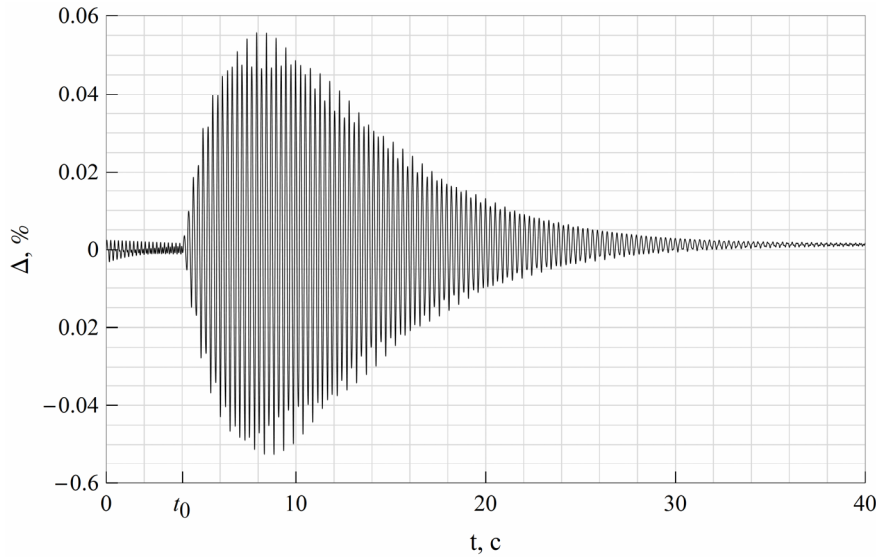


Рис. 6. График изменения погрешности

С момента времени t_0 значение погрешности возрастает до $\Delta_{\max} = 0,055\%$ и становится равным порядка $0,0015\%$ в установившемся режиме колебаний системы после выключения связи (см. рис. 6). Анализ полученных результатов показывает, что на значение погрешности наибольшее влияние оказывают параметры численного интегрирования: была обнаружена квазилинейная зависимость максимального процента погрешности $\Delta_{\max}$ от шага Δt численного интегрирования методом трапеций:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{100} \text{ с} \rightarrow \Delta_{\max} = 0,107\%, \quad \Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{200} \text{ с} \rightarrow \Delta_{\max} = 0,055\%,$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{500} \text{ с} \rightarrow \Delta_{\max} = 0,023\%, \quad \Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{1000} \text{ с} \rightarrow \Delta_{\max} = 0,0114\%,$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{4000} \text{ с} \rightarrow \Delta_{\max} = 0,0028\%.$$

Погрешность в установившемся режиме колебаний после выключения связи также снижается при уменьшении шага интегрирования.

При решении по методу I (12) с использованием импульсной переходной функции для «фиктивной» нагрузки (11) в неустановившемся режиме колебаний погрешность несколько возрастает по сравнению с решением (33):

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{200} \text{ с}, \quad \gamma = 0,05 \rightarrow \Delta_{\max} \approx 1\%,$$

$$\gamma = 0,2 \rightarrow \Delta_{\max} \approx 4\%.$$

Это можно объяснить различным учетом диссипации в (11) и в линейной системе. В установившемся режиме расхождений между решениями (12) и (33) нет.

Вывод. Численно-аналитический метод I позволяет рассчитывать системы с физической и конструктивной нелинейностью на произвольные динамические воздействия. Важное достоинство этого метода: при любых видах физической и конструктивной нелинейности он сохраняет свою структуру, изменяется только вид и характер «фиктивной» нагрузки, что позволяет в рамках одного алгоритма рассматривать широкий класс нелинейных задач. Точность и устойчивость алгоритма, разработанного на основе такого подхода, проиллюстрирована на примере расчета системы с выключающейся связью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Чернов Ю. Т., Романенко А. Б. К расчету нелинейных систем виброизоляции // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2002. № 4. С. 34—38.
2. Чернов Ю. Т. Вибрации строительных конструкций. М. : АСВ, 2011. 382 с.
3. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Универ У. Колебания в инженерном деле. М. : Машиностроение, 1985. 472 с.
4. Чернов Ю. Т., Петров И. А. К определению эквивалентных статических сил при расчете систем с выключающимися связями // Вестник МГСУ. 2012. № 4. С. 98—101.
5. Петров И. А. Расчет двухпролетной неразрезной балки с выключающейся связью // Вестник МГСУ. 2012. № 9. С. 148—155.
6. Mangano Salvatore. Mathematica Cookbook. O'Reilly Media, 2010. 830 p.
1. Chernov Yu. T., Romanenko A. B. K raschetu nelineynykh sistem vibroizolyatsii // Seysmostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy. 2002. № 4. S. 34—38.
2. Chernov Yu. T. Vibratsii stroitel'nykh konstruktsiy. M. : ASV, 2011. 382 s.
3. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Univer U. Kolebaniya v inzhenernom dele. M. : Mashinostroenie, 1985. 472 s.
4. Chernov Yu. T., Petrov I. A. K opredeleniyu ekvivalentnykh staticheskikh sil pri raschete sistem s vyklyuchayushchimisya svyaziyami // Vestnik MGSU. 2012. № 4. S. 98—101.
5. Petrov I. A. Raschet dvukhproletnoy nerazreznoy balki s vyklyuchayushcheysya svyaz'yu // Vestnik MGSU. 2012. № 9. S. 148—155.
6. Mangano Salvatore. Mathematica Cookbook. O'Reilly Media, 2010. 830 p.

© Петров И. А., Осипова М. В., 2012

Поступила в редакцию
в октябре 2012 г.

Ссылка для цитирования:

Петров И. А., Осипова М. В. О двух методах расчета нелинейных систем с одной степенью свободы // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2012. Вып. 3 (23).