УДК 621.1.016

Н. А. Парфентьева, О. Д. Самарин

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССАХ ПЕРЕНОСА

Рассматривается инженерная оценка возможных значений нестационарных потенциалов при решении нелинейных уравнений переноса с помощью теоремы сравнения. Полученные формулы позволяют определить пределы изменения искомых величин. Приведена оценка точности предлагаемых решений.

К л ю ч е в ы е с л о в а: потенциал, дифференциальное уравнение, теорема сравнения, оценка.

The engineering estimation of possible values of non-steady potentials is described at the solution of non-linear transfer equations by a comparison theorem. The obtained formulas are allowed to define limits of change of unknown quantities. The estimation of accuracy of the proposed solutions is adduced.

K e y w o r d s: potential, differential equation, comparison theorem, estimation.

При решении задач об определении нестационарных температурных полей, полей давления и концентрации иногда необходимо учитывать зависимость коэффициентов переноса от температуры, давления и других параметров. Обычно при расчетах берутся средние значения параметров в заданном интервале значений потенциалов (температуры, давления, концентрации). Однако такое приближение иногда оказывается достаточно грубым. Представляет интерес поиск приближенного решения, которое позволит определить интервал возможных значений потенциала. Для инженерной практики такая постановка задачи имеет большое практическое значение.

Рассмотрим приближенное решение с использованием теоремы сравнения [1]. Математическая формулировка задачи состоит в следующем: требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right], \tag{1}$$

где безразмерный потенциал, определяемый отношением потенциала к его значению на границе: $\varphi = \frac{T}{T_c}\ \left(\frac{p}{p_c}, \frac{n}{n_c}\right)$.

Сначала определяем значение потенциала в полубесконечной среде. Решение такой задачи имеет смысл, например, в случае прогревания или охлаждения грунта, диффузии частиц с большой поверхности и т. д.

Граничные условия имеют вид $\varphi\big|_{x=0} = 1,\ \varphi\big|_{t=0} = \varphi\big|_{x\to\infty} = 0$.

Рассмотрим в качестве первой зависимости $k(\varphi) = \frac{k_0}{1-\alpha\varphi}$.

Перейдем к новой неизвестной функции $H = \ln(1-\alpha\varphi)$. Тогда уравнение (1) преобразится к виду

$$\frac{k_0}{e^H}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2}$$

решаемому при условиях

$$H\big|_{x=0}=\ln(1-\alpha)=A<0,\ H\big|_{t=0}=H\big|_{x\to\infty}=0.$$

Отметим, что согласно теореме сравнения H не может быть больше нуля и меньше A, то есть искомая функция $A<H<0$.

Итак, задача сводится к решению двух уравнений

$$\begin{aligned} &k_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\frac{\partial u_1}{\partial t};\\ &k_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\frac{\partial u_2}{\partial t} \end{aligned} \tag{3}$$

при одинаковых граничных и начальных условиях

$$\begin{aligned} &u_1\big|_{x=0}=u_2\big|_{x=0}=C_1,\\ &u_1\big|_{x\to\infty}=u_2\big|_{x\to\infty}=u_1\big|_{t=0}=u_2\big|_{t=0}=C_2. \end{aligned}$$

Если $k_2>k_1$ и $C_2>C_1$, то кривая зависимости u_1 от координаты будет находиться выше кривой зависимости $u_2(x)$ в любой момент времени.

Решение уравнений (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} &u_1=\ln(1-\alpha)\left(1-\operatorname{erf}\sqrt{1-\alpha}\xi\right);\\ &u_2=\ln(1-\alpha)(1-\operatorname{erf}\xi), \end{aligned}$$

где $\xi=\dfrac{x}{2\sqrt{k_0 t}}$.

Теперь можно утверждать, что $H(x,\ t)$ будет находиться в области $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$.

Сделав обратное преобразование, находим область изменения $\varphi(x,t)$.

Расчеты показывают, что во многих случаях кривые $u_{\text{пр}}(x,t)=\dfrac{u_1(x,t)+u_2(x,t)}{2}$ или $u_{\text{пр}}(x,t)=\sqrt{u_1(x,t)u_2(x,t)}$ достаточно хорошо совпадают с точным решением. При этом ошибка решения уменьшается при уменьшении безразмерного параметра ξ.

Рассмотрим другую зависимость параметра переноса $k(\varphi)=k_0(1+\alpha\varphi)$. Сделаем замену $H=(1+\alpha\varphi)^2$. Тогда относительно H имеем уравнение

$$k_0\sqrt{H}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4}$$

при условиях

$$H\big|_{x=0} = (1-\alpha)^2, \quad H\big|_{t=0} = H\big|_{x\to\infty} = 1.$$

Взяв максимальное и минимальное значение $k_0\sqrt{H}$, получим область возможных значений H, сделав обратное преобразование, найдем φ_1 и φ_2 и соответственно область возможных значений $\varphi\,(x, t)$.

Расчеты показывают, что в данном случае будет лучше совпадать с точным решением среднеарифметическое $u_{\text{пр}}(x,t) = \dfrac{u_1(x,t) + u_2(x,t)}{2}$.

Заметим, что решения уравнений (3) и (4) могут быть найдены численными или приближенными методами. При этом можно пользоваться для расчетов стандартными программами. При использовании приближенных методов, например метода Бубнова — Галеркина, решение уравнения (4) имеет вид

$$H = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{10M\,\xi}}\right),$$

где $M = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5}\alpha$.

Используя эту формулу, можно сделать оценки величин достаточно просто.

При учете конвективного переноса необходимо решать уравнение вида

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] - \beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Появление нового слагаемого не изменяет хода решения задачи, так как теорему сравнения можно использовать и в этом случае. Подобный метод решения можно использовать и в случае ограниченной области, а также в случаях двумерного температурного поля или поля давлений.

Отметим еще раз, что рассматриваемый подход оказывается весьма удобным для инженерных расчетов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М. : Изд-во «Мир», 1998.

1. *Fridman A.* Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa. M. : Izd-vo «Mir», 1998.

Поступила в редакцию
в октябре 2011 г.

Ссылка для цитирования:
Парфентьева Н. А., Самарин О. Д. Применение теоремы сравнения для приближенной оценки значений температуры и концентрации при нелинейных процессах переноса // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Строит. информатика. 2011. Вып. 6(18). Режим доступа: www.vestnik.vgasu.ru.