

УДК 539.3

А. Н. Панин

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОЛОГИХ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) пологих железобетонных ребристых оболочек при действии кратковременных и длительных нагрузок. Допускается, что реологические свойства железобетона подчиняются линейной теории наследственной ползучести. Проведен анализ результатов расчета прочности и устойчивости ребристых оболочек с использованием программы PologObolochka и выполнено их сравнение с аналогичными результатами расчета гладких оболочек как для задач линейно-упругого деформирования, так и задач ползучести. При действии длительных нагрузок определяется критическое время, при котором оболочка теряет устойчивость от ползучести. Показано, что при исследовании железобетонных оболочек можно не учитывать такие факторы, как геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги.

К л ю ч е в ы е с л о в а: пологие железобетонные оболочки, ребра жесткости, ползучесть, прочность, устойчивость, допускаемая нагрузка.

The article gives a study of the stress-strain state of shallow ribbed reinforced concrete shells under the action of short-term and long-term loading. It is assumed that the rheological properties of reinforced concrete comply with the linear theory of hereditary creep. The results of structural analysis and of stability analysis for ribbed shells were studied applying the PologObolochka software. Also, these results were compared with the analogous ones of the analysis for unribbed shells for both linear elastic deformation problems and creep problems. Under the action of long-term loading, the crash time for a shell to lose stability through creep is determined. It is shown that while studying shallow reinforced concrete ribbed shells such factors as geometrical nonlinearity and transverse shear can be neglected.

К е у w o r d s: shallow reinforced concrete shells, stiffness ribs, creep, strength, stability, allowable load.

Тонкостенные оболочечные конструкции обладают достаточно высокой жесткостью. Для повышения жесткости железобетонные оболочки подкрепляются как промежуточными ребрами жесткости, так и опорным контуром в виде предварительно напряженного железобетонного пояса, как правило, армированного стальными канатами.

При длительном воздействии нагрузки в железобетонных оболочках может проявиться свойство ползучести материалов, т. е. происходит изменение во времени деформаций и напряжений при неизменной нагрузке, что может привести к потере прочности или даже устойчивости оболочки.

Учет физической нелинейности при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) железобетонных оболочек позволяет наиболее точно исследовать процесс их деформирования. Поэтому исследование пологих железобетонных ребристых оболочек с учетом физической нелинейности и развития ползучести материалов является актуальным.

1. Математическая модель деформирования пологих железобетонных ребристых оболочек с учетом дискретного расположения ребер, сдвиговой и крутильной жесткости ребер, физической нелинейности, развития деформаций ползучести материала. Математическая модель деформирования пологих железобетонных ребристых оболочек учитывает дискретное введение

ребер, сдвиговую и крутильную жесткости ребер, ползучесть материала на основе линейной теории наследственной ползучести и физическую нелинейность на основе деформационной теории. Математическая модель записана в виде функционала полной энергии деформации в безразмерных параметрах относительно неизвестных функций перемещений [1].

Рассматриваются пологие оболочки двоякой кривизны, прямоугольные в плане, подкрепленные со стороны вогнутости перекрестной системой ребер жесткости, параллельных осям координат (рис. 1). Срединная поверхность обшивки оболочки (толщиной h) принимается за координатную поверхность. Оси x, y ортогональной системы координат направлены по линиям главных кривизн оболочки, ось z ортогональна координатной поверхности в сторону вогнутости оболочки.

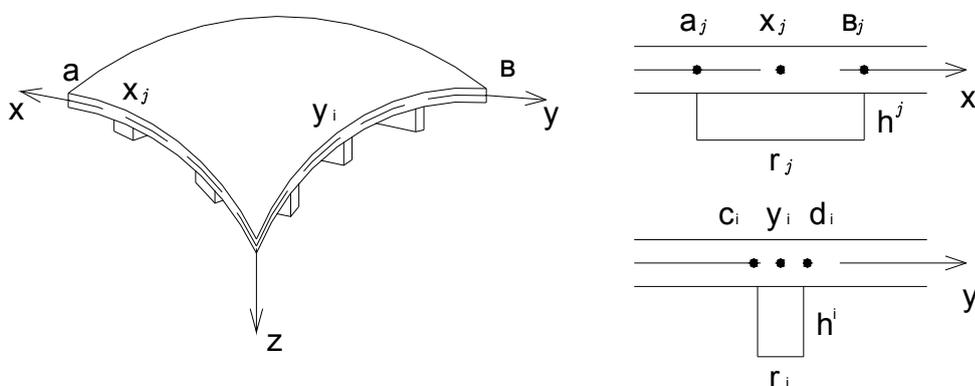


Рис. 1. Общий вид пологой ребристой оболочки

Оболочка, закрепленная определенным образом по контуру, находится под действием статической поперечной нагрузки $q(x, y)$.

Математическая модель деформирования оболочки состоит: из геометрических соотношений (связи деформаций и перемещений); физических соотношений (связи напряжений и деформаций); уравнений равновесия или функционала полной энергии деформации оболочки.

Геометрические соотношения в координатной поверхности при неучете геометрической нелинейности принимают вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - K_x W; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - K_y W; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь $U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ — перемещения точек координатной поверхности оболочки вдоль осей x, y, z соответственно; K_x, K_y — главные

кривизны оболочки вдоль осей x и y ($K_x = \frac{1}{R_1}$, $K_y = \frac{1}{R_2}$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны оболочки).

Деформации в слое, отстоящем на расстоянии z от срединной поверхности, принимают вид

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2; \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}, \quad (2)$$

где

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad 2\chi_{12} = -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Высоту и расположение ребер зададим функцией [2]

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad (4)$$

где h^j, r_j, m — высота и ширина ребер, параллельных оси y , и число ребер этого направления; h^i, r_i, n — то же для ребер, параллельных оси x , $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$; $\bar{\delta}(x - x_j), \bar{\delta}(y - y_i)$ — единичные столбчатые функции переменной x и y соответственно, равные единице в местах присоединения ребер.

Физические соотношения теории оболочек зависят от того, какие свойства материала конструкции проявляются (упругие, пластические, свойства ползучести и т. д.). Материал нагруженной конструкции обладает свойством упругости, если действующие напряжения в нем не превосходят некоторого определенного предела и сроки действия нагрузки невелики. В этом случае физические соотношения задаются линейным законом (законом Гука):

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z, \quad (5)$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона для изотропного материала.

Интегрируя напряжения (5) по z в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2} + H$ с целью преобразования задачи к двумерной, получим усилия и моменты, приведенные к координатной поверхности и приходящиеся на единицу длины сечения

$$N_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(h + \bar{F})(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu\chi_2) \right];$$

$$N_y = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(h + \bar{F})(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu\chi_1) \right];$$

$$\begin{aligned}
 N_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[(h + \bar{F}) \gamma_{xy} + 2\bar{S} \chi_{12} \right]; \\
 M_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\bar{S} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1 + \mu\chi_2) \right]; \\
 M_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\bar{S} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2 + \mu\chi_1) \right]; \\
 M_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\bar{S} \gamma_{xy} + 2 \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12} \right].
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь \bar{F} , \bar{S} , \bar{J} — площадь поперечного или продольного сечения ребер жесткости, приходящаяся на единицу длины сечения оболочки, статический момент и момент инерции этого сечения соответственно:

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz; \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz; \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz.$$

При исследовании ползучести теория, наиболее полно учитывающая особенности деформирования бетона, создана трудами Г. Н. Маслова, Н. Х. Арутюняна, А. А. Гвоздева, И. Е. Прокоповича, И. И. Улицкого, В. Д. Харлаба и других ученых. В соответствии с линейной теорией наследственной ползучести для старого бетона физические соотношения можно принять в виде [3]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z + \int_{t_0}^t (\varepsilon_x^z(\tau) + \mu\varepsilon_y^z(\tau)) R_1(t, \tau) d\tau \right]; \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z + \int_{t_0}^t (\varepsilon_y^z(\tau) + \mu\varepsilon_x^z(\tau)) R_1(t, \tau) d\tau \right]; \\
 \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\gamma_{xy}^z + \int_{t_0}^t \gamma_{xy}^z(\tau) R_2(t, \tau) d\tau \right].
 \end{aligned} \tag{7}$$

Удобно минус перед функциями влияния $R_1(t, \tau)$, $R_2(t, \tau)$ перенести в соотношения (7), и тогда

$$R_1(t - \tau) = -E\gamma C_\infty e^{-\gamma(1+EC_\infty)(t-\tau)}; \quad R_2(t - \tau) = 2\frac{G}{E} R_1(t - \tau). \tag{8}$$

Нагрузка, действующая на конструкцию, считается статической, тем не менее деформации и перемещения считаются функциями не только пространственных переменных x и y , но и временной координаты t .

Функционал полной энергии деформации (функционал Лагранжа) полой оболочки, находящейся под действием статической поперечной нагрузки $q(x, y)$, имеет вид:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + 2M_{xy} \chi_{12} - 2qW] dx dy, \quad (9)$$

где a, b — линейные размеры оболочки вдоль осей x и y .

Если рассматриваются упругие задачи и изотропный материал, то функционал (9) для ребристой оболочки можно записать в виде (с введением индекса y):

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_y = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1 \gamma_{xy}^2 + \right. \\ & \left. + 2\bar{S} [\varepsilon_x \chi_1 + \mu \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_2 + \mu \varepsilon_y \chi_1 + 2\mu_1 \gamma_{xy} \chi_{12}] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) [\chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1 \chi_{12}^2] - \frac{2(1-\mu^2)}{E} qW \right\} dx dy, \quad (10) \end{aligned}$$

где $\mu_1 = 0,5(1 - \mu)$.

Если могут проявляться свойства ползучести материала конструкции, то функционал (9) для ребристой оболочки представляется в виде:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_y - \mathfrak{A}_c,$$

где \mathfrak{A}_y имеет вид (10), а \mathfrak{A}_c записывается в виде (аргументы y деформаций, модулей упругости и коэффициентов Пуассона опускаются)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_c = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \int_0^t \left\{ [(h + \bar{F}) (\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2) + \right. \\ & \left. + 2\bar{S} (\varepsilon_x \chi_1 + \mu \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_2 + \mu \varepsilon_y \chi_1) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2)] R_1(t, \tau) + \right. \\ & \left. + [(h + \bar{F}) \mu_1 \gamma_{xy}^2 + 2\bar{S} (2\mu_1 \gamma_{xy} \chi_{12}) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) 4\mu_1 \chi_{12}^2] R_2(t, \tau) \right\} dx dy d\tau. \quad (11) \end{aligned}$$

Физические соотношения при нелинейно-упругом деформировании материала конструкции на основе деформационной теории пластичности принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z - \omega(\varepsilon_i) (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z)]; \\ \sigma_y = & \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z - \omega(\varepsilon_i) (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z)]; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}(\gamma_{xy}^z - \omega(\varepsilon_i)\gamma_{xy}^z).$$

При учете физической нелинейности функционал полной энергии деформации оболочки принимает вид

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_y - \mathcal{E}_n. \quad (13)$$

Функционал \mathcal{E}_y имеет вид (10), а \mathcal{E}_n принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ I_1(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2) + \right. \\ & + 2I_2(\varepsilon_x\chi_1 + \mu\varepsilon_x\chi_2 + \varepsilon_y\chi_2 + \mu\varepsilon_y\chi_1 + 2\mu_1\gamma_{xy}\chi_{12}) + \\ & \left. + I_3(\chi_1^2 + 2\mu_1\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1\chi_{12}^2) \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{Здесь } I_k = \int_{-h/2}^{h/2+H} \omega(\varepsilon_i) z^{k-1} dz, \quad k=1, 2, 3,$$

$$\text{где } \omega(\varepsilon_i) = m\varepsilon_i^2, \quad m = a_1 \left(\frac{E}{R_b} \right)^2.$$

Интенсивность деформаций можно представить в виде

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{b_1 + b_2 z + b_3 z^2},$$

$$\text{где } b_1 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2; \quad b_2 = 2\varepsilon_x\chi_1 + 2\varepsilon_y\chi_2 + \varepsilon_x\chi_2 + \varepsilon_y\chi_1 + \gamma_{xy}\chi_{12};$$

$$b_3 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_1\chi_2 + \chi_{12}^2.$$

Теперь

$$I_1 = \frac{4m}{3} \left[(h + \bar{F})b_1 + \bar{S}b_2 + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{Y} \right) b_3 \right];$$

$$I_2 = \frac{4m}{3} \left[\bar{S}b_1 + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{Y} \right) b_2 + \bar{K}b_3 \right];$$

$$I_3 = \frac{4m}{3} \left[\left(\frac{h^3}{12} + \bar{Y} \right) b_1 + \bar{K}b_2 + \left(\frac{h^5}{80} + \bar{M} \right) b_3 \right];$$

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz; \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} Z dz; \quad \bar{Y} = \int_{h/2}^{h/2+H} Z^2 dz; \quad \bar{K} = \int_{h/2}^{h/2+H} Z^3 dz; \quad \bar{M} = \int_{h/2}^{h/2+H} Z^4 dz.$$

2. Методика исследования модели, основанная на методе Рунца и итерационных процессах и ориентированная на использование компьютерных технологий и программ расчета на ЭВМ напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек. Рассматривается алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния пологих железобетонных ребристых оболочек с учетом нелинейности деформирования и ползучести материала. Уравнения равновесия таких оболочек с учетом нелинейности деформирования и возможности развития деформаций ползучести представляют собой громоздкую систему интегро-дифференциальных уравнений восьмого порядка. Решение такой задачи вызывает серьезные математические трудности.

Наиболее удобный алгоритм решения поставленной задачи состоит в следующем: к функционалу $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_y - \bar{\Theta}_n$ или $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_y - \bar{\Theta}_c$, записанному в безразмерных параметрах, применяется метод Рунца и находится система нелинейных интегро-алгебраических уравнений. Нелинейность уравнений заключается в том, что напряжения нелинейно зависят от деформаций.

Применяется методика решения задачи, основанная на методе итераций:

для уточнения начального упруго-линейного решения и получения нелинейно-упругого решения при каждом значении параметра нагрузки;

для нахождения деформаций ползучести при каждом значении параметра нагрузки и известном начальном решении линейно- или нелинейно-упругой задачи при последовательном изменении времени t .

Введем безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \bar{U} = \frac{aU}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bV}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \\ K_\xi = \frac{a^2 K_x}{h}, \quad K_\eta = \frac{b^2 K_y}{h}, \quad \bar{a} = \frac{a}{h}, \quad \bar{F} = \frac{\bar{F}}{h}, \quad \bar{S} = \frac{\bar{S}}{h^2}, \quad \bar{J} = \frac{\bar{J}}{h^3}, \quad \bar{P} = \frac{a^4 q}{Eh^4}. \end{aligned} \quad (15)$$

В соответствии с методом Рунца представим искомые функции $\bar{U}(\xi, \eta, t)$, $\bar{V}(\xi, \eta, t)$, $\bar{W}(\xi, \eta, t)$ в виде:

$$\bar{U} = \sum_{I=1}^N U(I)X1(I)Y1(I); \quad \bar{V} = \sum_{I=1}^N V(I)X2(I)Y2(I); \quad \bar{W} = \sum_{I=1}^N W(I)X3(I)Y3(I). \quad (16)$$

Здесь $U(I)$, $V(I)$, $W(I)$ — неизвестные функции переменной t $X1(I)$ – $X3(I)$ — известные аппроксимирующие функции переменной ξ , удовлетворяющие при $\xi=0$, $\xi=1$ заданным краевым условиям; $Y1(I)$ – $Y3(I)$ — известные аппроксимирующие функции переменной η , удовлетворяющие при $\eta=0$, $\eta=1$ заданным краевым условиям.

Найдем производные от $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_y - \bar{\Theta}_n$ или $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_y - \bar{\Theta}_c$ по $U(I)$, $V(I)$, $W(I)$ и приравняем их к нулю. В результате получим систему нелинейных интегрально-алгебраических уравнений:

$$\sum_{I=1}^N [U(I)CF1(I, \ell) + V(I)CF2(I, \ell) + W(I)CF3(I, \ell)] = D_1(I);$$

$$\sum_{I=1}^N [U(I)CF4(I, \ell) + V(I)CF5(I, \ell) + W(I)CF6(I, \ell)] = D_2(I); \quad (17)$$

$$\sum_{I=1}^N [U(I)CF7(I, \ell) + V(I)CF8(I, \ell) + W(I)CF9(I, \ell)] - CP(\ell)\bar{P} = D_3(I);$$

$\ell = 1, 2, \dots, N,$

где $D_i(I) = F_i(I)$, если решается физически нелинейная задача, или $D_i(I) = \Pi_i(I)$, если решается задача ползучести, при этом

$$F_1 = \sum_{I=1}^N \int_{t_0}^t \{ [U(I)CC1(I, \ell) + V(I)CC2(I, \ell) + W(I)CC3(I, \ell)] R_1(t, \tau) + [U(I)CC4(I, \ell) + V(I)CC5(I, \ell) + W(I)CC6(I, \ell)] R_2(t, \tau) \} d\tau;$$

$$F_2 = \sum_{I=1}^N \int_{t_0}^t \{ [U(I)CC7(I, \ell) + V(I)CC8(I, \ell) + W(I)CC9(I, \ell)] R_1(t, \tau) + [U(I)CC10(I, \ell) + V(I)CC11(I, \ell) + W(I)CC12(I, \ell)] R_2(t, \tau) \} d\tau;$$

$$F_3 = \sum_{I=1}^N \int_{t_0}^t \{ [U(I)CC13(I, \ell) + V(I)CC14(I, \ell) + W(I)CC15(I, \ell)] R_1(t, \tau) + [U(I)CC16(I, \ell) + V(I)CC17(I, \ell) + W(I)CC18(I, \ell)] R_2(t, \tau) \} d\tau. \quad (18)$$

$$\Pi_1 = \int_0^1 \int_0^1 \{ \bar{I}_1 [(2\bar{\varepsilon}_x + a_2\bar{\varepsilon}_y)b_1 + 2a_3\bar{\gamma}_{xy}b_2] + \bar{I}_2 [(2\bar{\chi}_1 + a_2\bar{\chi}_2)b_1 + 4a_7\bar{\chi}_{12}b_2] \} d\xi d\eta;$$

$$\Pi_2 = \int_0^1 \int_0^1 \{ \bar{I}_1 [(2a_1\bar{\varepsilon}_y + a_2\bar{\varepsilon}_x)b_3 + 2a_3\bar{\gamma}_{xy}b_4] + \bar{I}_2 [(a_2\bar{\chi}_1 + a_6\bar{\chi}_2)b_3 + 4a_7\bar{\chi}_{12}b_4] \} d\xi d\eta;$$

$$\Pi_3 = - \int_0^1 \int_0^1 \{ \bar{I}_1 [(2\bar{\varepsilon}_x K_\xi + a_2 K_\eta \bar{\varepsilon}_y)b_5 + (2a_1 \bar{\varepsilon}_y K_\eta + a_2 \bar{\varepsilon}_y K_\xi)b_5] + \bar{I}_2 [(2\bar{\chi}_1 + a_2\bar{\chi}_2)K_\xi b_5 + (a_2\bar{\chi}_1 + a_6\bar{\chi}_2)K_\mu b_5 + (2\bar{\varepsilon}_x + a_2\bar{\varepsilon}_y)b_6 + (a_2\bar{\varepsilon}_x + a_6\bar{\varepsilon}_y)b_7 + 4a_7\bar{\gamma}_{xy}b_8] + \bar{I}_3 [(2\bar{\chi}_1 + a_2\bar{\chi}_2)b_6 + (a_2\bar{\chi}_1 + 2a_1\bar{\chi}_2)b_7 + 8a_7\bar{\chi}_{12}b_8] \} d\xi d\eta, \quad (19)$$

где $b_1 = X1'(\ell)Y1(\ell)$, $b_2 = X1(\ell)Y1'(\ell)$, $b_3 = X2(\ell)Y2'(\ell)$, $b_4 = X2'(\ell)Y2(\ell)$,
 $b_5 = X3(\ell)Y3(\ell)$, $b_6 = X3''(\ell)Y3(\ell)$, $b_7 = X3(\ell)Y3''(\ell)$, $b_8 = X3'(\ell)Y3'(\ell)$.

Кратко систему (17) запишем в виде:

$$F_y(X) - f P = F_n(X), \text{ или } F_y(X) - f P = F_c(X), \quad (20)$$

где $F_y(X) - f P$ — левые части системы (17); $F_n(X) = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)^T$; $F_c(X) = (F_1, F_2, F_3)^T$; $X = [U(I), V(I), W(I)]^T$.

Для решения линейно-упругой задачи при $P = P_1$ находится решение уравнения:

$$F_y(X) - f P_1 = 0. \quad (21)$$

Для нахождения нелинейно-упругого решения при некоторой нагрузке P_1 решается итерационная задача $F_y(X_i) - f P_1 = F_n(X_{i-1})$ до тех пор, пока предыдущее решение не будет отличаться от последующего на величину заданной погрешности. При этом за X_0 берется решение линейно-упругой задачи при P_1 .

Рассмотрим теперь решение задачи в условиях ползучести. Представим $F_c(X)$ в виде

$$F_c(X) = \int_{t_0}^t [\Phi_1(X(\tau))R_1(t, \tau) + \Phi_2(X(\tau))R_2(t, \tau)] d\tau. \quad (22)$$

Отрезок интегрирования $[t_0, t_k]$ разобьем на частичные отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ с шагом Δt (в дальнейшем шаг по t будем брать $\Delta t = 1$ сут).

$$F_c(X) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\Phi_1(X(\tau))R_1(t, \tau) + \Phi_2(X(\tau))R_2(t, \tau)] d\tau. \quad (23)$$

На каждом частичном отрезке интеграл вычислим приближенно по формуле прямоугольников

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\Phi_1(X(\tau))R_1(t, \tau) + \Phi_2(X(\tau))R_2(t, \tau)] d\tau \approx \\ \approx [\Phi_1(X(t_{i-1}))R_1(t_k, t_{i-1}) + \Phi_2(X(t_{i-1}))R_2(t_k, t_{i-1})] \Delta t. \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначим $\bar{R}_1 = R_1(t_k, t_{i-1})\Delta t$, $\bar{R}_2 = R_2(t_k, t_{i-1})\Delta t$.

Таким образом, $F_c(X)$ при $t = t_k$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_c(X) &= \sum_{i=1}^k [\Phi_1(X(t_{i-1}))\bar{R}_1 + \Phi_2(X(t_{i-1}))\bar{R}_2] = \\ &= \Phi_1(\bar{X}_{k-1})\bar{R}_1 + \Phi_2(\bar{X}_{k-1})\bar{R}_2 = F_c(\bar{X}_{k-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\bar{X}_{k-1} = \sum_{i=0}^k X(t_{i-1}) = X(t_0) + X(t_1) + \dots + X(t_{k-1})$.

Аналогичный подход с заменой интеграла интегральной суммой при расчете оболочек использовался в работах В. И. Климанова и С. А. Тимашева [4], В. В. Карпова, В. К. Кудрявцева [5].

При решении задачи ползучести при определенной нагрузке P вначале находится решение линейно-упругой или нелинейно-упругой задачи $X(t_0)$. Затем это решение подставляется в $F_c(X)$ и решается опять-таки линейно- или нелинейно-упругая задача с известной правой частью в линейных алгебраических уравнениях. Итерационный процесс по временной координате t можно записать в виде

$$F_y(X_i) - f P_1 = F_c(\bar{X}_{i-1}). \quad (26)$$

Процесс по временной координате t продолжается до тех пор, пока прогиб не начнет резко возрастать. Время, при котором это происходит, будет определено как критическое время $t_{кр}$.

Разработанный алгоритм расчета реализован в виде программного комплекса для ЭВМ.

3. *Определение допускаемой нагрузки на ребристые железобетонные оболочки из разных классов бетона из условия прочности.* Рассматривается прочность пологих железобетонных ребристых оболочек при линейно-упругом деформировании. Так как все решения целесообразно проводить в безразмерных параметрах, в табл. 1 представлены размерные параметры для некоторых реальных вариантов оболочек и соответствующие им безразмерные параметры. Используя формулы перехода от безразмерных параметров к размерным, можно получить все характеристики НДС для конкретных вариантов оболочек и конкретных видов материала.

$$\text{В табл. 1 } \bar{a} = \frac{a}{h},$$

$$\bar{R} = \frac{R}{h},$$

$$\bar{K}_\xi = \frac{a^2}{hR_1}.$$

В качестве примеров расчета были выбраны квадратные в плане пологие оболочки, имеющие шарнирно-неподвижное закрепление по контуру и находящиеся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Оболочки могут быть гладкими (без ребер) или подкрепленными шестью (по три ребра в каждом направлении) или восемнадцатью (по девять ребер в каждом направлении) регулярно расположенными ребрами жесткости высотой $3h$ и шириной $2h$, направленными параллельно осям координат.

На рис. 2 в качестве примера с результатами расчета представлен график нагрузка \bar{P} — прогиб \bar{W} для варианта III оболочек (табл. 1).

Кривые с номером 1 на рис. 2 соответствуют оболочке без ребер, кривые 2 — оболочке, подкрепленной шестью ребрами, 3 — то же, подкрепленной восемнадцатью ребрами. Кривые без индекса соответствуют прогибу в центре оболочек, с индексом 1 — в четверти оболочки.

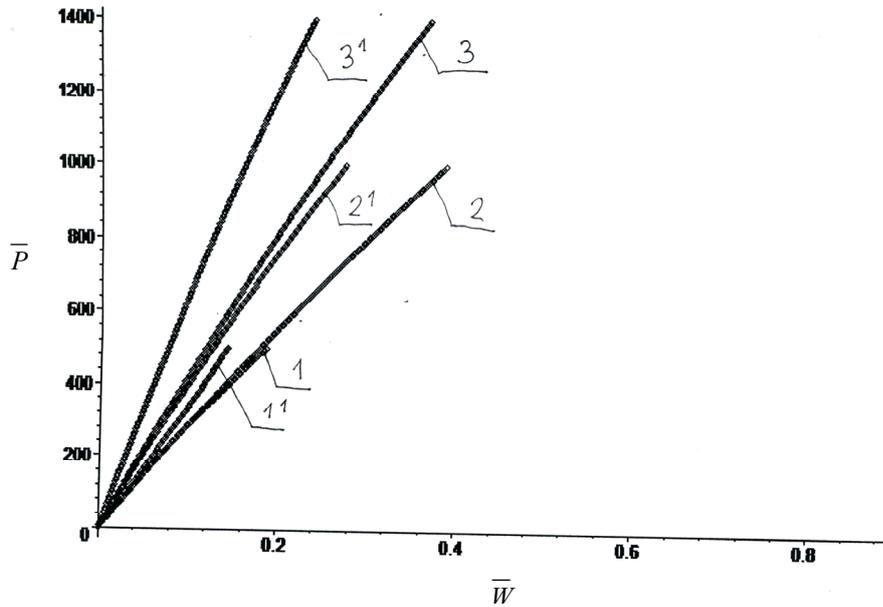


Рис. 2. Зависимость $\bar{P} — \bar{W}$ для рассматриваемых видов оболочек

Как показали расчеты, наличие ребер в оболочках существенно понижает величину их прогиба. При подкреплении оболочки восемнадцатью ребрами снижение ее прогибов по сравнению с прогибами оболочки без ребер при одной и той же нагрузке составляет для вариантов оболочек: варианта I — 55 %, варианта II — 65 %, варианта III — 40 %.

Т а б л и ц а 1

Варианты рассматриваемых оболочек и их параметры

№ варианта оболочки	Размерные параметры, м			Безразмерные параметры			Стрела подъема d
	$a = b$	$R = R_1 = R_2$	h	$\bar{a} = \bar{b}$	$\bar{R} = \bar{R}_1 = \bar{R}_2$	$\bar{K}_\xi = \bar{K}_\eta$	
I	54	135,9	0,09	600	1510	238	$29,75h$
	36	90,6	0,06				
	27	67,95	0,045				
	18	45,3	0,03				
II	36	90,6	0,18	200	503	79,5	$10h$
	27	67,95	0,135				
	18	45,3	0,09				
III	27	67,95	0,27	100	251,5	39,76	$5h$
	18	45,3	0,18				
	13,5	34	0,135				

Для анализа прочности бетона оболочек применяется условие прочности (критерий прочности) теории Кулона — Мора как наиболее приемлемой для использования в программном комплексе расчета оболочек

$$\sigma_1 - \frac{R_{bt}}{R_b} \sigma_3 \leq \sigma_{\text{доп}}, \quad (27)$$

где главные напряжения σ_1, σ_3 находятся при $z = -h/2$ (на верхней поверхности оболочки). Так как при поперечной нагрузке оболочки испытывают преимущественно сжатие, допускаемое напряжение может быть вычислено по формуле $\sigma_{\text{доп}} = \frac{R_{bt}}{k}$. Обобщенный коэффициент запаса прочности принимается $k = 2$.

С использованием формулы перехода к безразмерным параметрам для напряжения $\bar{\sigma} = \frac{-2}{E} \sigma$ найдены безразмерные значения допускаемых напряжений $\bar{\sigma}_{\text{доп}}$ для различных вариантов оболочек при разных классах бетона. Выборочные значения $\bar{\sigma}_{\text{доп}}$ приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Допустимые напряжения для различных классов бетона

Класс бетона	Модуль упругости бетона E , МПа	Допускаемое напряжение $\bar{\sigma}_{\text{доп}}$ при варианте оболочки		
		I	II	III
B55	4×10^4	7,2	0,8	0,2
B40	$3,6 \times 10^4$	7,0	0,78	0,19
B30	$3,25 \times 10^4$	6,65	0,74	0,18

Допускаемая нагрузка $q_{\text{доп}}$ находится из условия потери прочности оболочек с использованием формулы перехода $q_{\text{доп}} = \frac{E \bar{P}_{\text{доп}}}{-4a}$.

В табл. 3 представлены некоторые результаты расчета критических нагрузок $\bar{P}_{\text{кр}}$ и допускаемых нагрузок $q_{\text{доп}}$ для вариантов оболочек I, II, III, изготовленных из бетона класса B40 и B30 (в скобках показаны безразмерные критические нагрузки).

Определены значения $q_{\text{доп}}$ для оболочек вариантов I, II, III и для других классов бетона.

Как видно из табл. 3, допускаемые нагрузки, найденные из условий прочности, существенно ниже, чем критические нагрузки при потере устойчивости оболочки (для нахождения критических нагрузок использовалась программа PologObolochka, регистрационный номер № 2011613074). Например, для оболочки варианта I допускаемая нагрузка составляет 20 % от критической для гладкой оболочки и 16 % для оболочки, подкрепленной восемнадцатью ребрами. Таким образом, учитывать геометрическую нелинейность при исследовании железобетонных оболочек нецелесообразно.

Т а б л и ц а 3

Критические и допускаемые нагрузки для рассматриваемых вариантов оболочек

Номер варианта оболочки	Число ребер	$\bar{P}_{кр}$	$q_{поп}^{-3}$, МПа ($\bar{P}_{доп}$)	
			для бетона класса В40	для бетона класса В30
I	0	70100	3,87 (13920)	3,32 (13224)
	18	160500	6,94 (25000)	5,93 (23653)
II	0	466000	14,83 (53400)	12,72 (50730)
	18	978100	21,37 (76923)	18,33 (73077)
III	0	3537000	37,59 (135309)	32,24 (128544)
	18	5358000	40,72 (146605)	34,92 (139250)

Наличие ребер в оболочках существенно повышает величину допускаемой нагрузки на нее по сравнению с оболочками без ребер. Для оболочек, подкрепленных шестью ребрами, увеличение допускаемой нагрузки на нее составляет: для оболочки варианта I — 75 %, для варианта II — 55 %, для варианта III — 60 %. При подкреплении оболочек восемнадцатью ребрами увеличение допускаемой нагрузки на нее составляет: для варианта I — 150 %, для варианта II — 222 %, для варианта III — 220 %.

Исследовано НДС пологих железобетонных ребристых оболочек в линейно-упругой постановке при различной толщине, кривизне оболочек, числе подкрепляющих оболочку ребер, изготовленных из разных классов бетона. С использованием критерия Кулона — Мора определены критические (допускаемые) нагрузки. Проведен анализ прогибов и напряжений по полю оболочки для выяснения наиболее опасных зон.

4. *Исследование НДС оболочек при длительном нагружении и анализ потери устойчивости от ползучести для различных видов оболочек.* Приводятся результаты расчета напряженно-деформированного состояния пологих железобетонных ребристых оболочек при длительном нагружении с учетом развития деформаций ползучести бетона. Для различных параметров оболочек найдено критическое время $t_{кр}$ потери устойчивости от ползучести.

Исследуется неограниченная неустановившаяся ползучесть. Функции влияния (ядра релаксации) материала (старого бетона) возьмем в виде:

$$R_1(t - \tau) = \gamma EC_{\infty} e^{-\gamma(1+EC_{\infty})(t-\tau)}, \quad R_2(t - \tau) = 2 \frac{G}{E} R_1(t - \tau), \quad (28)$$

где $\gamma = 0,01 \frac{1}{сут}$, $EC_{\infty} = 3$, $C_{\infty} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{МПа}$, $E = 3 \cdot 10^4$ МПа.

В этом случае при $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1$ сут $R1_{k,i-1} = \gamma EC_{\infty} e^{-\gamma(1+EC_{\infty})(k-i+1)\Delta t}$,
 $R2_{k,i-1} = \frac{2}{3} R1_{k,i-1}$.

В результате развития ползучести бетона во времени начинается бурный рост прогибов оболочек (в 10...15 раз превышающих прогибы при $t=0$). Время, при котором это наступает, принимается за критическое время $t_{кр}$.

На рис. 3, 4 представлены графики $\bar{W} — t$, полученные при различных значениях нагрузки для оболочки варианта I. На рис. 3 приведены зависимости $\bar{W}(0,25; 0,25) — t$ для неподкрепленной оболочки. Кривая 1 соответствует нагрузке $\bar{P} = 20 \cdot 10^3$, кривая 2 — нагрузке $\bar{P} = 25 \cdot 10^3$, 3 — $\bar{P} = 30 \cdot 10^3$, 4 — $\bar{P} = 35 \cdot 10^3$, 5 — $\bar{P} = 40 \cdot 10^3$.

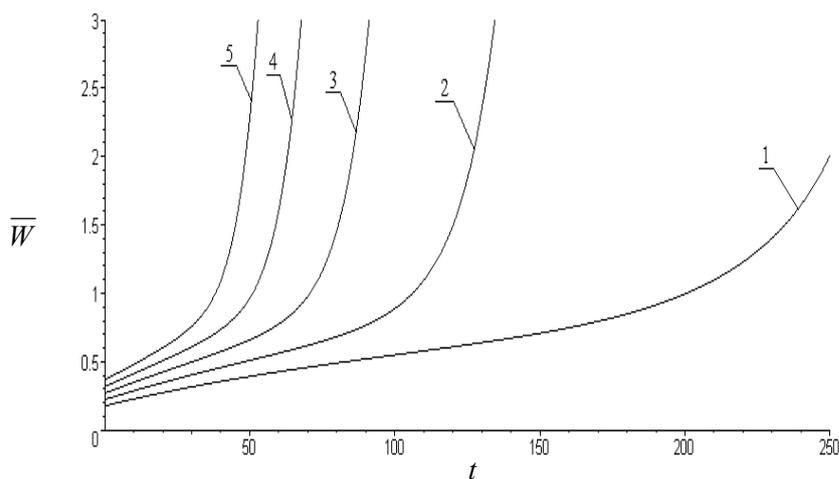


Рис. 3. Зависимость $\bar{W}(0,25; 0,25) — t$ для оболочки варианта I при соответствующих нагрузках

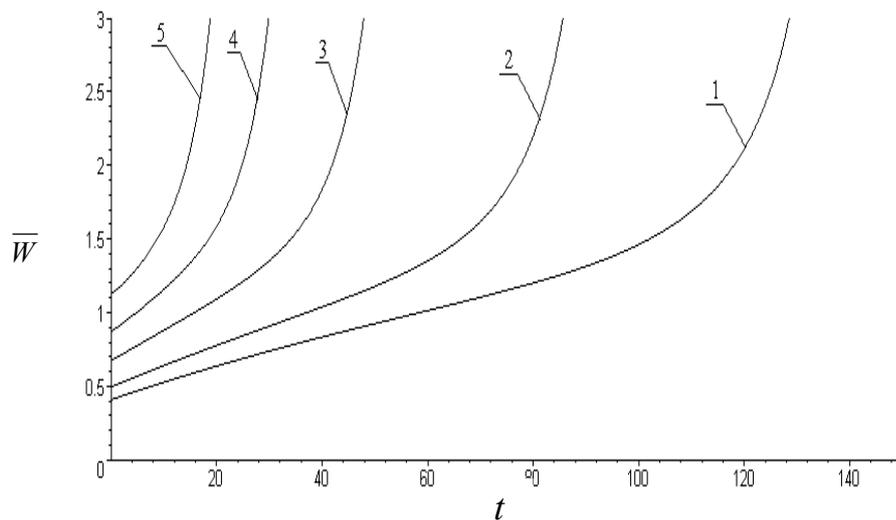


Рис. 4. Зависимость $\bar{W}(0,5; 0,5) — t$ для оболочки варианта I, подкрепленной восемнадцать ребрами при соответствующих нагрузках

На рис. 4 даются зависимости $\bar{W}(0,5;0,5) - t$ для оболочки, подкрепленной восемнадцатью ребрами. Кривая 1 соответствует нагрузке $\bar{P} = 50 \cdot 10^3$, кривая 2 — нагрузке $\bar{P} = 60 \cdot 10^3$, 3 — $\bar{P} = 80 \cdot 10^3$, 4 — $\bar{P} = 100 \cdot 10^3$, 5 — $\bar{P} = 120 \cdot 10^3$.

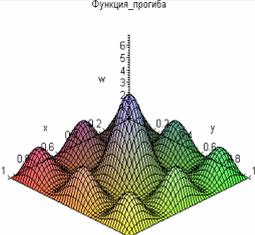
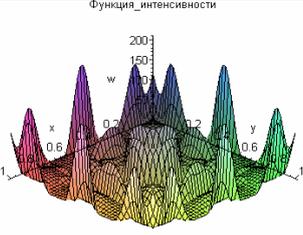
В табл. 4 для нагрузки $\bar{P} = 30 \cdot 10^3$ представлен характер изменения прогиба \bar{W} и напряжения $\bar{\sigma}_g = \sigma_1 - \frac{R_{bt}}{R_b} \sigma_3$ во времени для неподкрепленной ребрами оболочки. При развитии ползучести материала оболочки со временем происходит не только рост прогибов и напряжений, но и перераспределение напряжений по ее полю. Так, например, максимум напряжений из угловых точек оболочки смещается по всему наружному контуру оболочки.

Т а б л и ц а 4

Характер изменения прогибов и напряжений при развитии ползучести в материале

T , сут	Прогиб \bar{W}	Напряжение $\bar{\sigma}_g$
$T = 0$		
$T = 30$		
$T = 70$		
$T = 100$		

Окончание табл. 4

T , сут	Прогиб \bar{W}	Напряжение $\bar{\sigma}_g$
$T = 118$		

Для большей наглядности эти результаты расчета представлены графически (рис. 5). Кривая 1 на рис. 5 соответствует оболочке без ребер, кривая 2 — оболочке, подкрепленной восемнадцатью ребрами.

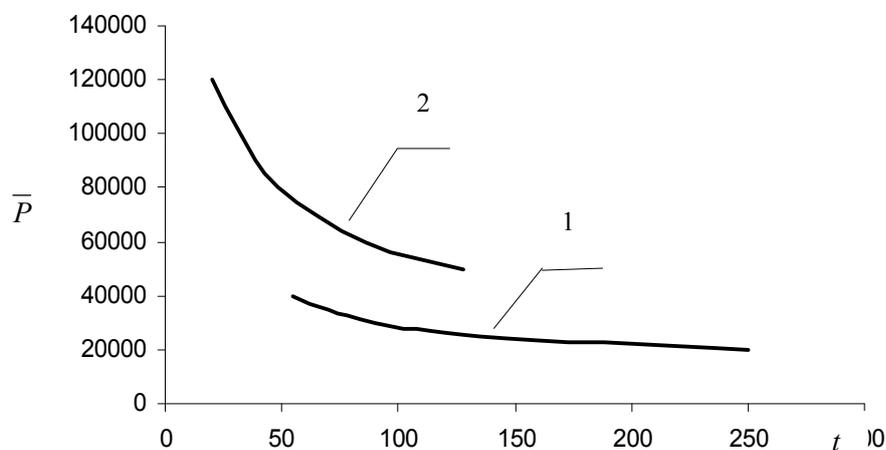


Рис. 5. Кривые снижения допустимой нагрузки при развитии ползучести в бетоне

Для рассматриваемых тонких оболочек $\left(c \quad h = \frac{a}{600} \right)$ потеря прочности происходит при $t > t_{кр}$.

В табл. 5 приведены зависимости $\bar{P} — t_{кр}$ для оболочки варианта I.

Т а б л и ц а 5

Зависимость $\bar{P} — t_{кр}$ для оболочки варианта I при развитии ползучести в бетоне

Оболочка без ребер		Оболочка с 18 ребрами	
\bar{P}	$t_{кр}$, сут	\bar{P}	$t_{кр}$, сут
20000	250	50000	128
25000	135	60000	86
30000	90	80000	48
35000	70	100000	32
40000	55	120000	20

Для варианта оболочки III при развитии ползучести материала оболочки со временем происходит рост и перераспределение напряжений по полю оболочки. Потеря прочности происходит при $t < t_{кр}$ (примерно при $0,6t_{кр}$).

Исследование пологих железобетонных ребристых оболочек с учетом развития деформаций ползучести показало, что со временем происходит перераспределение напряжений по полю оболочки и максимум напряжений наблюдается вблизи контуров оболочки, происходит снижение критической нагрузки, что необходимо учитывать при проектировании конструкции.

5. *Исследование влияния физической нелинейности на НДС оболочек, приводящей к снижению допустимой нагрузки на них.* Исследуется напряженно-деформированное состояние пологих железобетонных ребристых оболочек с учетом физической нелинейности для различных классов бетона.

Для старого бетона секущий модуль упругости можно принять в виде

$$E_c = E(1 - \omega(\varepsilon_i)), \quad (29)$$

где $\omega(\varepsilon_i) = 0,111\left(\frac{E}{R_b}\right)^2 \varepsilon_i^2$.

На рис. 6 представлены зависимости $\bar{P} — \bar{W}$ для оболочки с параметрами $\bar{a} = \bar{b} = 200$, $K_\xi = K_\eta = 79,5$ без ребер, а на рис. 7 — для оболочки, подкрепленной восемнадцатью ребрами.

Анализ приведенных результатов расчетов в геометрически линейной и физически нелинейной постановках показывает, что при учете физической нелинейности деформации существенно возрастают, а уровень напряжений при этом понижается. Однако некоторые оболочки (варианты оболочек II и III) при нагрузке, меньше допустимой, найденной при линейно-упругом деформировании, теряют устойчивость. Таким образом, учет физической нелинейности показывает, что железобетонные оболочки могут утратить свою эксплуатационную пригодность из-за потери устойчивости до достижения величины допустимой нагрузки, соответствующей линейно-упругому деформированию оболочки. Полученные в настоящей работе результаты достаточно хорошо согласуются с исследованиями оболочек ряда авторов, например, для железобетонных оболочек — В. В. Улитиным [6], для металлических оболочек — В. А. Крысько [7].

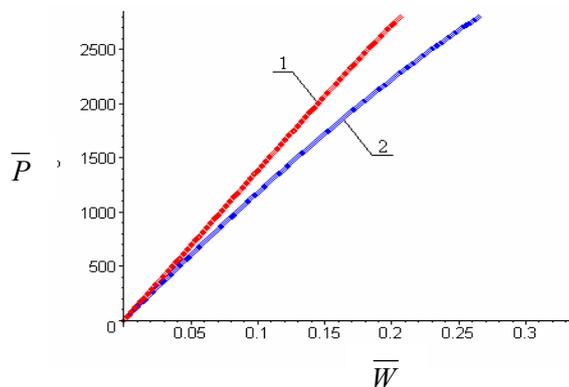


Рис. 6. Зависимость $\bar{P} — \bar{W}$ для оболочки варианта II

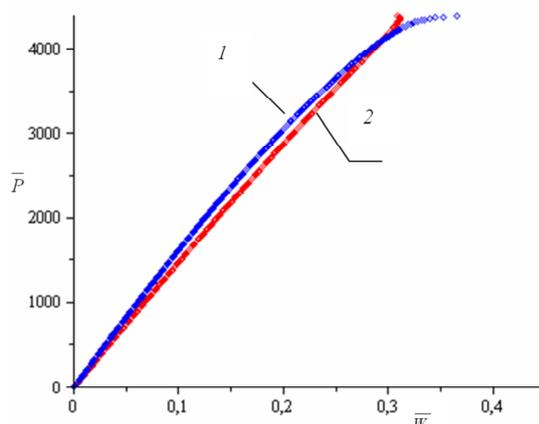


Рис. 7. Зависимость \bar{P} — \bar{W} для оболочки варианта II, подкрепленной восемнадцатью ребрами

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения : в 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 288 с.
2. Ильин В. П., Карпов В. В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Л. : Стройиздат, Ленингр. отделение, 1986. 168 с.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М. : Гостехиздат, 1952. 323 с.
4. Климанов В. И., Тимашев С. А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек. Свердловск : УНЦ АН СССР, 1985. 291 с.
5. Карпов В. В., Кудрявцев В. К. Устойчивость ребристых пологих оболочек при длительном нагружении // Вестник ВолгГАСУ Сер.: Стр-во и архит. 2006. Вып. 6(21). С. 160—168.
6. Улитин В. В. Физически нелинейный анализ устойчивости оболочек. СПб. : ГИОРД, 2007. 96 с.
7. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов : Саратовский ун-т, 1976. 216 с.

1. Карпов В. В. Prochnost i ustoichivost podkreplennykh obolochek vrashcheniya : v 2 ch. Ch. 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoichivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya. M. : FISMATLIT, 2010. 288 s.
2. Ilyin V. P., Karpov V. V. Ustoichivost rebristykh obolochek pri bolshykh peremeshcheniyakh. L. : Sroyizdat, Leningr. otddeleniye, 1986. 168 s.
3. Arutunyan N. Kh. Nekotorye voprosy teorii polzuchesti. M. : Gostekhizdat, 1952. 323 s.
4. Klimanov V. I., Timashev S. A. Nelineynaya zadacha podkreplennykh obolochek. Sverdlovsk : UNTs AN SSSR, 1985. 291 s.
5. Karpov V. V., Kudryavtsev V. K. Ustoichivost rebristykh pologikh obolochek pri dlitelnom nagruzhenii // Vestnik VolGASU. Ser.: Str-vo i arkhit. Vyp. 6 (21). S. 160—168.
6. Ulitin V. V. Fizicheski nelineyniy analiz ustoichivosti obolochek. SPb. : GIORД, 2007. 96 s.
7. Krysko V. A. Nelineynaya statika i dinamika neodnorodnykh obolochek. Saratov : Saratovskiy un-t, 1976. 216 s.

© Панин А. Н., 2012

Поступила в редакцию
в феврале 2011 г.

Ссылка для цитирования:

Панин А. Н. Деформирование пологих ребристых оболочек в условиях физической нелинейности и ползучести бетона // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2012. Вып. 1(20).