

УДК 539.3

В. К. Мусеев, В. В. Немчинов**РАСЧЕТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТИПА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Предложен явный по времени численный метод решения динамических упругих задач, основанный на аппроксимации правых частей дифференциальных уравнений методом конечных элементов, но определение скоростей и смещений на следующем временном слое задается с учетом линейного распределения скоростей между временными слоями. Метод обладает регулируемой аппроксимационной вязкостью и дисперсией численного решения. Исследована точность и сходимость численного решения для динамической задачи о дифракции продольной волны на шаровой полости.

К л ю ч е в ы е с л о в а: разностная схема, динамическая задача, численный метод решения, дифракция упругих волн, шаровая полость, бесконечное упругое пространство.

In the article the authors propose explicit time-numerical method for solving dynamic elastic problems, based on approximation of the right-hand sides of differential equations by the finite element method, but the definition of velocity and displacement on the following temporary layer is defined taking account the linear velocity distribution between the layers. The method has the regulated approximation viscosity and dispersion of the numerical solution. We studied the accuracy and convergence of numerical solutions for the dynamic problem of diffraction of a longitudinal wave in a spherical cavity.

К е y w o r d s: difference scheme, dynamic task, numerical method of solution, diffraction of elastic waves, spherical cavity, infinite elastic space.

Взаимодействие упругих волн со сложными строительными объектами является актуальной задачей строительной механики. В осесимметричной системе координат можно моделировать трехмерные объекты, обладающие осью симметрии, а именно защитные оболочки ядерных реакторов, подземных газовых и нефтехранилищ — т. е. сооружения, которые должны обладать максимальной надежностью [1—11].

В данной работе предлагается численный метод решения динамических задач теории упругости в осесимметричной системе координат.

Уравнения движения в случае осевой симметрии имеют вид [12]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r}, \quad (2)$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial U}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\lambda U}{r} + \frac{\lambda \partial W}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial W}{\partial z} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\lambda U}{r} + \frac{\lambda \partial U}{\partial r}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \theta + 2\mu \frac{U}{r} = (\lambda + 2\mu) \frac{U}{r} + \frac{\lambda \partial W}{\partial z} + \frac{\lambda \partial U}{\partial r}, \quad (5)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right), \quad (6)$$

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (7)$$

где U, W — перемещения; ρ — плотность; $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{rz}$ — компоненты тензора напряжений; θ — объемное расширение; λ, μ — коэффициенты Ляме.

Матрица жесткости и масс для любого конечного элемента определяется формулами [13]:

$$k^{(e)} = \int_V B^T DB 2\pi r \det[J] d\xi d\eta, \quad (8)$$

$$m = \rho \int_V N_i N_j dV = \rho \int_V N_i N_j 2\pi r \det[J] d\xi d\eta, \quad (9)$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{rr}; \varepsilon_{zz}; \tau_{rz}; \varepsilon_{\theta\theta}\}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{r}; \quad \tau_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\varepsilon = B\bar{u},$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\text{где } B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$m\bar{u}_{tt} + k^{(e)}\bar{u} = F_{\bar{u}}, \quad (16)$$

$\bar{u} = \{U, W\}$ — вектор перемещений (14); $F_{\bar{u}}$ — узловые силы, действующие на КЭ.

Скорости в дискретных точках расчетной области вычисляются соотношениями:

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t Ru, \quad (17)$$

$$w_{t+\Delta t} = w_t + \Delta t Rw, \quad (18)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t [\delta u_{t+\Delta t} + (1-\delta)u_t], \quad (19)$$

$$W_{t+\Delta t} = W_t + \Delta t [\delta w_{t+\Delta t} + (1-\delta)w_t], \quad (20)$$

где Ru , Rw — правые части уравнений (17, 18), полученных из матрицы жесткости конечного элемента (8) и узловых сил:

$$Ru = k_{11}^{(e)}U + k_{12}^{(e)}W + F_U, \quad (21)$$

$$Rw = k_{21}^{(e)}U + k_{22}^{(e)}W + F_W, \quad (22)$$

где Δt — шаг по дискретному времени; $u_{t+\Delta t}$, $w_{t+\Delta t}$, $U_{t+\Delta t}$, $W_{t+\Delta t}$ — скорости и смещения на временном слое $t+\Delta t$; $u_t = u$, $w_t = w$, $U_t = U$, $W_t = W$ — скорости и смещения на временном слое t ; δ — параметр схемы из интервала $[1,05...1,3]$, от которого зависит аппроксимационная вязкость разностного метода и дисперсия решения.

Для иллюстрации работы данного метода решим задачу о дифракции плоской продольной волны на шаровой полости радиуса $R=1,0$ (рис. 1).

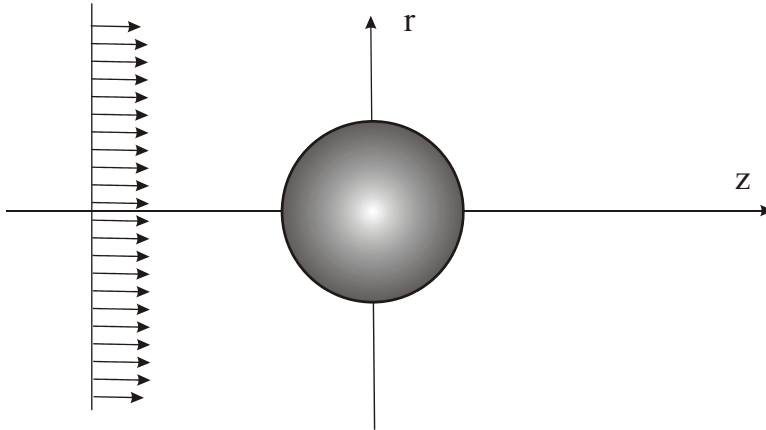


Рис. 1. Дифракция ступенчатой волны на шаровой полости в осесимметричной постановке

Рассматривается безразмерная система осесимметричных уравнений:

$$U' = U/L, \quad W' = W/L, \quad u' = u/c_p, \quad w' = w/c_p,$$

$$t' = c_p t / L, \quad \sigma_{rr}' = \sigma_{rr} / (\rho c_p^2), \quad \sigma_{zz}' = \sigma_{zz} / (\rho c_p^2), \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta}' = \sigma_{\theta\theta} / (\rho c_p^2), \quad \tau_{rz}' = \tau_{rz} / (\rho c_p^2).$$

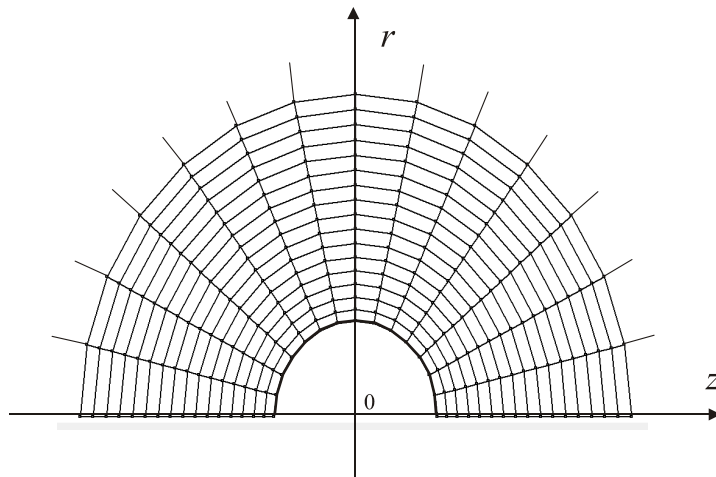


Рис. 2. Фрагмент разбивки расчетной области на четырехугольные конечные элементы

Характеристики материала: $c_s / c_p = \beta = 0,25$, $(\nu = 1/3)$, $\alpha = 1 - 2\beta = 0,25$.

На шар набегают плоская волна, скорость по оси z имеет ступенчатый профиль (единичная ступенька) и различную частоту разбиения большой дуги шара. Дуга, образующая шар, при вращении делится на 16, 32, 48 интервалов ($hfi = \pi/16 = 0,196$; $r0 = 1,0$; $hr = r0 \cdot hfi = 0,196$), $\Delta t = 0,098$ — линия 1, $\Delta t = 0,049(\pi/32)$ — линия 2, $\Delta t = 0,032(\pi/48)$ — линия 3 (рис. 3).

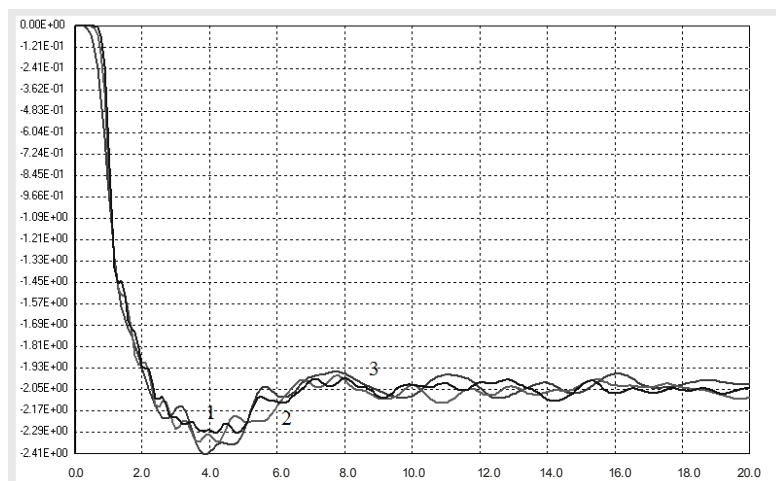


Рис. 3. Значения напряжений σ_{zz} в верхней точке сечения шара плоскостью, параллельной набегающей волне

Примерные значения при $t = 4,5$ равны $(-2,28; -2,37; -2,34)$.

Уточнение с помощью экстополяции Ричардсона дает значение:

$$U = \frac{1}{2}U_h - 4U_{\frac{h}{2}} + \frac{9}{2}U_{\frac{h}{3}} = -0,5 \cdot 2,3575 + 4 \cdot 2,3305 - 4,5 \cdot 2,33 = -2,294.$$

Получено значение $\sigma_{zz \max} = -2,294$.

В работе [14] для статической задачи при осевом растяжении среды с шаровой полостью определено $\sigma_{zz \max} = -2,0625$ при тех же характеристиках материала, что очень близко к постоянному значению на рис. 3.

В работе [15] представлено приближенное аналитическое решение динамической задачи о дифракции продольной волны на шаровой полости и показано, что динамическое решение в момент $t = 4,5$ на 11 % больше, чем аналогичное статическое, т. е. $\sigma_{zz \max} = -2,289375$, что практически совпадает с уточненным численным решением.

Предложенная схема вычислений упругих динамических задач с осевой симметрией, основанная на методе конечных элементов, дала достаточно хорошие результаты, и данный метод можно применять для широкого круга осесимметричных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мусаев В. К. Дифракция продольной волны на круглом и квадратном отверстиях в упругой среде // Тезисы докладов конференции по распространению упругих и упругопластических волн. Фрунзе : Фрунзенский политехнический институт, 1983. Ч. 1. С. 72—74.
2. Филиппов И. Г., Немчинов В. В. Однородный разностный алгоритм решения плоских динамических задач теории упругости в областях сложной формы // Тезисы докладов конференции по распространению упругих и упруго-пластических волн. Фрунзе : Фрунзенский политехнический институт, 1983. Ч. 1. С. 76—78.
3. Хесин Г. Л., Костин И. Х., Юренева Е. В. Исследование сейсмонапряженного состояния подземных сооружений с учетом влияния свободной поверхности // Гидротехническое строительство. 1987. № 7. С. 13—17.
4. Мусаев В. К. Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 1990. № 4. С. 74—78.
5. Мусаев В. К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика. 1997. № 1. С. 87—110.
6. Мусаев В. К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Проблемы комплексной безопасности. 2007. № 3. С. 48—60.
7. Мусаев В. К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. 2009. № 1. С. 55—80.
8. Мусаев В. К. О достоверности результатов численного метода решения сложных задач волновой теории упругости при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях // Ученые записки Российского государственного социального университета. 2009. № 5. С. 21—33.
9. Мусаев В. К. Моделирование волн напряжений в сложных областях с помощью метода вычислительной механики // Исследования по теории сооружений. 2010. № 2 (XXVII). С. 44—52.
10. Мусаев В. К. Вычислительный эксперимент в задачах моделирования нестационарных волн напряжений в областях сложной формы // Исследования по теории сооружений. 2010. № 2 (XXVII). С. 138—149.
11. Мусаев В. К. О моделировании упругих нестационарных волн напряжений в сложных деформируемых объектах // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. М. : РУДН, 2012. С. 318—320.

12. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М. : Высшая школа, 1977. 216 с.
13. Морозов Е. М., Никушкин Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М. : Наука, 1980. 256 с.
14. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1975. 576 с.
15. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев : Наукова думка, 1978. 308 с.

1. Musaev V. K. Difraktsiya prodol'noy volny na kruglom i kvadratnom otverstiyakh v uprugoy srede // Tezisy докладов konferentsii po rasprostraneniyu uprugikh i uprugoplasticheskikh voln. Frunze : Frunzenskiy politekhnicheskiy institut, 1983. Ch. 1. S. 72—74.

2. Filippov I. G., Nemchinov V. V. Odnorodnyy raznostnyy algoritm resheniya ploskikh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti v oblastiakh slozhnoy formy // Tezisy докладов konferentsii po rasprostraneniyu uprugikh i uprugoplasticheskikh voln. Frunze : Frunzenskiy politekhnicheskiy institut, 1983. Ch. 1. S. 76—78.

3. Khesin G. L., Kostin I. Kh., Yureneva E. V. Issledovanie seysmonapryazhennogo sostoyaniya podzemnykh sooruzheniy s uchetom vliyaniya svobodnoy poverkhnosti // Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo. 1987. № 7. S. 13—17.

4. Musaev V. K. Reshenie zadachi difraktsii i rasprostraneniya uprugikh voln metodom konechnykh elementov // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 1990. № 4. S. 74—78.

5. Musaev V. K. Chislennoe reshenie volnovykh zadach teorii uprugosti i plastichnosti // Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Ser. Prikladnaya matematika i informatika. 1997. № 1. S. 87—110.

6. Musaev V. K. Ob otsenke dostovernosti i tochnosti chislennogo resheniya nestatsionarnykh dinamicheskikh zadach // Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Ser. Problemy kompleksnoy bezopasnosti. 2007. № 3. S. 48—60.

7. Musaev V. K. Otsenka dostovernosti i tochnosti rezul'tatov vychislitel'nogo eksperimenta pri reshenii zadach nestatsionarnoy volnovoy teorii uprugosti // Nauchnyy zhurnal problem kompleksnoy bezopasnosti. 2009. № 1. S. 55—80.

8. Musaev V. K. O dostovernosti rezul'tatov chislennogo metoda resheniya slozhnykh zadach volnovoy teorii uprugosti pri udarnykh, vzryvnykh i seysmicheskikh vozdeystviyakh // Uchenye zapiski Rossiyskogo gosudarstvennogo sotsial'nogo universiteta. 2009. № 5. S. 21—33.

9. Musaev V. K. Modelirovanie voln napryazheniy v slozhnykh oblastiakh s pomoshch'yu metoda vychislitel'noy mekhaniki // Issledovaniya po teorii sooruzheniy. 2010. № 2 (XXVII). S. 44—52.

10. Musaev V. K. Vychislitel'nyy eksperiment v zadachakh modelirovaniya nestatsionarnykh voln napryazheniy v oblastiakh slozhnoy formy // Issledovaniya po teorii sooruzheniy. 2010. № 2 (XXVII). S. 138—149.

11. Musaev V. K. O modelirovanii uprugikh nestatsionarnykh voln napryazheniy v slozhnykh deformiruemykh ob'ektakh // Informatsionno-telekommunikatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnykh sistem. Tezisy докладов Vserossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem. M. : RUDN, 2012. S. 318—320.

12. Rekach V. G. Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii uprugosti. M. : Vysshaya shkola, 1977. 216 s.

13. Morozov E. M., Nikishkov G. P. Metod konechnykh elementov v mekhanike razrusheniya. M. : Nauka, 1980. 256 s.

14. Timoshenko S. P., Gud'er Dzh. Teoriya uprugosti. M. : Nauka, 1975. 576 s.

15. Guz' A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. Difraktsiya uprugikh voln. Kiev : Naukova dumka, 1978. 308 s.

© Мусаев В. К., Немчинов В. В., 2012

Поступила в редакцию
в сентябре 2012 г.

Ссылка для цитирования:

Мусаев В. К., Немчинов В. В. Расчетный метод решения динамических осесимметричных задач теории упругости типа метода конечных элементов для областей сложной формы // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2012. Вып. 3 (23).