УДК 658.512

В. Г. Куликов, Т. А. А. Хаммади Альшахи

МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ НА СТАТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ОСНОВАНИЯХ ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Известны преимущества вариационных методов при решении задач математической физики. Зачастую именно эти методы позволяют избежать сложных и громоздких выкладок и быстро получить нужный результат с приемлемой для инженера точностью. В задачах статического и динамического расчета конструкций один из вариационных принципов (принцип Лагранжа) характеризует тот факт, что в состоянии статического равновесия любая конструкция деформируется таким образом, что ее полная потенциальная энергия обладает минимумом.

В силу нелинейности рассматриваемая в работе задача решается методом упругих решений в форме переменных параметров упругости через итерационный алгоритм, численная реализация которого осуществляется методом конечных разностей.

К л ю ч е в ы е с л о в а: **с**татический расчет, динамический расчет, теория упругости, принцип Лагранжа, метод упругих решений.

The advantages of variation methods for solving problems of mathematical physics are known. Often, these methods are allowed to avoid difficult and cumbersome facings and quickly to achieve the desired result with acceptable accuracy for engineer. In the problems of static and dynamic analysis of structures is one of the variation principles (Lagrange principle) is characterized by the fact that in a state of static equilibrium, any design is deformed so that its total potential energy has a minimum.

Because of the nonlinearity considered in the problem is solved by the method of elastic solutions in the form of variable elastic parameters through an iterative algorithm for numerical realization of which the finite difference method is used.

K e y w o r d s: static analysis, dynamic analysis, theory of elasticity, Lagrange principle, method of elastic solutions.

Методология расчета прямоугольной плиты, лежащей на статистически неоднородном основании, частично совпадает с численным методом расчета балки конечной длины. Отличие состоит в ином строении матриц A, S, T — покажем формирование этих матриц для плиты.

Рассмотрим прямоугольную плиту со сторонами a, b с жесткостью Д, лежащую на статистически неоднородном винклеровском основании и нагруженную случайной нагрузкой переменной интенсивности q. Если через k обозначим случайный коэффициент постели основания, то уравнение равновесия такой плиты записывается в виде

$$Д\nabla^4 w(x,y) + k(x,y)w(x,y) = q(x,y), \qquad (1)$$

где $\nabla^4 = \dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$ — бигармонический оператор.

К уравнению (1) необходимо еще добавить соответствующие граничные условия. Будем рассматривать плиту со свободными краями. Это допущение не ограничивает общности дальнейших рассуждений и выкладок. Начало координат поместим в левом углу плиты. Ось x направим вдоль длинной стороны a плиты; ось y — вдоль короткой b, ось w направим вниз. Тогда для выбранных граничных условий запишем уравнения Кирхгофа, которые выражают собой равенство нулю случайных изгибающих моментов и обобщенных поперечных сил на краях плиты:

$$M_y = -Д\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{\substack{y=0\\ y=B}} = 0;$$
$$M_x = -Д\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\ x=a}} = 0; \qquad (2)$$

$$Q_x = -Д\left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\ x=a}} = 0;$$
$$Q_y = -Д\left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y \partial x^2}\right)\Bigg|_{\substack{y=0\\ y=B}} = 0, \qquad (2')$$

где μ — коэффициент Пуассона материала плиты.

Указанные внутренние усилия плиты действуют следующим образом: изгибающие моменты — вдоль соответствующих координатных осей, а поперечные силы — в сечениях, перпендикулярных к соответствующим осям.

Запишем граничные условия в сокращенном виде:

$$z_i w(x,y) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \qquad (3)$$

Средние значения случайных функций коэффициента постели и нагрузки обозначим через k_0 и q_0, а функцию прогиба платы — через W_0.

Подставляя линейные разложения случайных функций $k(x, y)$, $q(x, y)$ и $w(x, y)$ по малому параметру в уравнения (2), (3) и приравнивая выражения при одинаковых степенях этого параметра, получаем две системы уравнений:

$$Д\nabla^4 w_0(x,y) + k_0(x,y) w_0(x,y) = q_0(x,y); \qquad z_i w_0(x,y) = 0; \qquad (4)$$

$$Д\nabla^4 w_1(x,y) + k_0(x,y) w_1(x,y) = q_1(x,y) - w_0(x,y) k_1(x,y);$$
$$z_i w_1(x,y) = 0;\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad (4')$$

где w_1, k_1, q_1 — случайные функции с математическим ожиданием, равным нулю.

Системы уравнений (4), (4') будем решать также конечно-разностным методом. Для этого наложим на плиту конечно-разностную прямоугольную сетку и промаркируем все узлы по порядку. Выпишем разностный анолог бигармонического оператора с учетом граничных условий (2), (2') в характерных узлах сетки плиты, показанных на рис. Нижеприведенные выражения даны для узла i.

Случай а):

$$\nabla^4 w = [20 w_i - 8(w_k + w_l + w_m + w_n) + 2(w_0 + w_p + w_q + w_r) +$$
$$+ w_s + w_v + w_t + w_u]\frac{1}{h^4}; \qquad (5)$$

Случай б):

$$\nabla^4 w = [(2-\mu)(w_q + w_p) + (2\mu - 6)w_n - 8(w_k + w_l + w_m) + 2(w_0 + w_r) + \\ + w_s + w_t + w_u + 19w_i]\frac{1}{h^4}; \tag{6}$$

Случай в):

$$\nabla^4 w = [(2-2\mu)w_q + (2\mu - 6)(w_n + w_k) + (2-\mu)(w_0 + w_p) - \\ -8(w_m + w_l) + 2w_r + w_u + w_t + 18w_i]\frac{1}{h^4}; \tag{7}$$

Случай г):

$$\nabla^4 w = [(-6\mu^2 - 8\mu + 16)w_i + (4\mu^2 - 4\mu + 8)(w_k + w_l) + (-12 + 4\mu)w_m + \\ +2w_u + (4-2\mu)(w_r + w_0) + (1-\mu^2)(w_s + w_t)]\frac{1}{h^4}; \tag{8}$$

Случай д):

$$\nabla^4 w = [(-5\mu^2 - 8\mu + 15)w_i + (2\mu^2 + 4\mu - 6)(w_k) + (2\mu^2 + 4\mu - 6)(w_l) + \\ +(4\mu - 12)(w_m) + (4-2\mu)(w_0 + w_r) + (1-\mu^2)w_t + 2w_u]\frac{1}{h^4}; \tag{9}$$

Случай е):

$$\nabla^4 w = [(-4\mu^2 - 8\mu + 12)w_i + (4\mu^2 + 4\mu - 12)(w_m + w_l) + \\ +(2-2\mu^2)(w_t + w_u) + (8-8\mu)w_ч]\frac{1}{h^4}, \tag{10}$$

где $w\xi$ — значение функции w в узле ξ.

В случае е) при конечно-разностной аппроксимации бигармонического оператора в угловой точке плиты наряду с условиями равенства нулю M_x, M_y, Q_x, Q_y было использовано еще условие равенства нулю крутящего момента:

$$H = -Д(1-\mu)\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}, \tag{11}$$

которое в конечно-разностном виде записывается следующим образом (см. рис.):

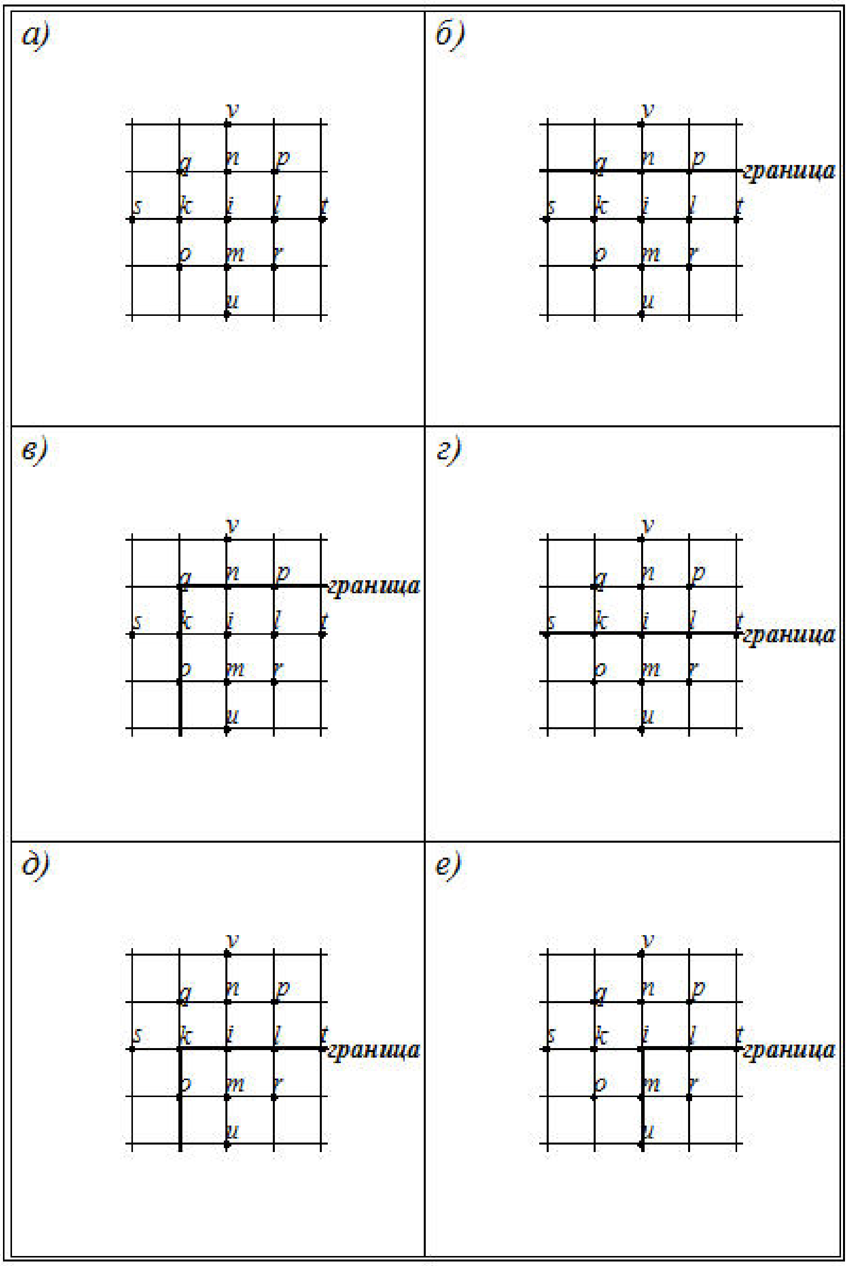
$$H = -Д(1-\mu)\frac{1}{4h^2}(w_q + w_0 + w_p + w_r) = 0. \tag{12}$$

При переходе к другим углам и сторонам плиты в формулах меняются местами лишь соответствующие индексы у функции w согласно обозначениям рис.

Аппроксимируя по формулам в каждом узле разностной сетки дифференциальное уравнение равновесия плиты, мы получим систему уравнений относительно неизвестных значении функций w_0 и w_1. Запишем полученные системы уравнении в матричной форме:

$$Aw_0 = B_0; \qquad Aw_1 = B_1, \tag{13}$$

Нагрузка на плиту считается распределенной по прямоугольным площадкам, стороны которых кратны шагу разностной сетки.



Разностный аналог бигармонического оператора с учетом граничных условий в характерных узлах сетки плиты

Поступила в редакцию
в ноябре 2011 г.

Ссылка для цитирования:

Куликов В. Г., Хаммади Альшахи Т. А. А. Методика применения расчета прямоугольных плит на статически неоднородных основаниях для систем автоматизированного проектирования // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Строит. информатика. 2011. Вып. 6(18). Режим доступа: www.vestnik.vgasu.ru.