

УДК 624.04

А. А. Ходжибоев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается численное решение плоской динамической задачи теории упругости методом граничных уравнений. Для построения алгоритма численного решения динамической плоской задачи проведена последовательная аппроксимация первой, а затем второй производной искомой линейной функции по оси времени. Для решения поставленной задачи используется фундаментальное решение, полученное на основе преобразования Лапласа. Реализация алгоритма рассмотрена на примере внутренней краевой задачи в условиях плоской деформации, где на одной части границы заданы перемещения, а на другой — динамическая нагрузка.

К л ю ч е в ы е с л о в а: численное моделирование, плоская динамическая задача, уравнение движения, граничные интегральные уравнения, последовательная аппроксимация, многочлен, коэффициенты аппроксимации, векторное уравнение.

In this article are presented the numerical solution of flat dynamic problem of theory of elasticity by method of boundary equations. For definition of algorithm of numerical solution of dynamic flat problem executed a sequentially approximation first, after second derived function polynomial of first degree on the time axe. For solution of assigned task using fundamental solution obtained based on Laplace transform. Realization of algorithm considered on example of inner boundary problem in plane strain conditions where in one part of boundary given displacements and the other dynamic load.

К е y w o r d s: numerical modeling, flat dynamic problem, motion equation, boundary integral equations, sequentially approximation, polynomial, approximation coefficient, vector equation.

Рассмотрим упругое однородное изотропное тело со следующими характеристиками материала: E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; ρ — масса единицы объема (плотность). Решение динамической задачи теории упругости сводится к дифференциальному уравнению [1]

$$(c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } U + c_2^2 \Delta U + F = \ddot{U}, \quad (1)$$

где $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ — скорости распространения продольных

и поперечных волн; U — вектор неизвестных перемещений. Входящий в (1) вектор объемных сил F имеет статический характер воздействия и представляется как постоянная гравитационная нагрузка, т. е. как собственный вес.

С целью построения алгоритма численного решения динамической задачи проведем последовательную аппроксимацию по оси времени на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$. Аппроксимируя первую, а затем вторую производную искомой функции многочленом первой степени, в результате получаем [1]

$$\ddot{U}_n = 4(U_n - U_{n-1}) / \tau_n^2 - 4\dot{U}_{n-1} / \tau_n - \ddot{U}_{n-1}, \quad (2)$$

$$\dot{U}_n = 2(U_n - U_{n-1}) / \tau_n - \dot{U}_{n-1}, \quad (3)$$

где $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Записав (1) без учета объемных сил в момент времени t_n и внося (2) в правую часть, получаем

$$(c_1^2 - c_2^2) \text{grad div} U_n + c_2^2 \Delta U_n - s_n^2 U_n = -Q_{n-1} / \rho, \quad (4)$$

$$s_n^2 = \alpha_1 / \tau_n^2, \quad Q_{n-1} = \rho \left(\alpha_1 U_{n-1} / \tau_n^2 + \alpha_2 \dot{U}_{n-1} / \tau_n + \alpha_3 \ddot{U}_{n-1} \right). \quad (5)$$

В случае регулярной сетки ($\tau_n = \tau$) векторное уравнение (4) в декартовой системе координат может быть представлено в индексных обозначениях:

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{i,ij}^{(n)} + c_2^2 u_{j,ii}^{(n)} - s^2 u_j^{(n)} = -q_j^{(n-1)} / \rho, \quad (6)$$

$$q_j^{(n-1)} = \rho \left[\alpha_1 u_j^{(n-1)} / \tau^2 + \alpha_2 \dot{u}_j^{(n-1)} / \tau + \alpha_3 \ddot{u}_j^{(n-1)} \right], \quad (7)$$

где после запятой в индексных обозначениях производится дифференцирование и суммирование по дважды повторяющемуся индексу; $u_i^{(n)}$, $u_j^{(n-1)}$ — компоненты вектора перемещений в моментах времени t_n и t_{n-1} ; $q_j^{(n-1)}$ — сила инерции единицы объема, кН/м³, в момент времени t_{n-1} .

Фундаментальное решение (6), полученное на основе преобразования Лапласа [2—4], представляется в виде

$$u_{ij}^*(\xi, x, s) = \frac{1}{\alpha \pi \rho c_2^2} \left(\psi \delta_{ij} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right), \quad (8)$$

где $r = (r_i r_i)^{1/2}$, $r_i = x_i(x) - x_i(\xi)$; для двумерных задач $\alpha = 2$ ($i, j = 1, 2$), функции ψ и χ равны

$$\psi = K_0(\bar{r}_2) + [K_1(\bar{r}_2) - 9K_1(\bar{r}_1)] / \bar{r}_2, \quad \chi = K_2(\bar{r}_2) - 9^2 K_2(\bar{r}_1), \quad (9)$$

где $\bar{r}_1 = sr / c_1$, $\bar{r}_2 = sr / c_2$, $9 = c_2 / c_1$ — безразмерные параметры; K_m — модифицированные функции Бесселя второго рода и порядка m [5, 6]. Фундаментальное решение (8) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, записанных для бесконечной области при действии единичной силы:

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{i,ij}^* + c_2^2 u_{j,ii}^* - s^2 u_j^* = -\delta(\xi, x) e_i / \rho.$$

Производные функции ψ и χ (9) по x_1 будут равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} &= \frac{s}{c_2} \left[-K_1(\bar{r}_2) - \frac{K_0(\bar{r}_2)}{\bar{r}_2} - \frac{2K_1(\bar{r}_2)}{\bar{r}_2^2} + 9 \frac{K_1(\bar{r}_1)}{\bar{r}_2^2} \right] m_1 + \\ &+ 9 \frac{s}{c_1} \left[\frac{K_0(\bar{r}_1)}{\bar{r}_2} + \frac{K_1(\bar{r}_1)}{\bar{r}_1 \bar{r}_2} \right] m_1; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_1} = g^2 \frac{s}{c_1} \left[\frac{2K_0(\bar{r}_1)}{\bar{r}_1} + \frac{4K_1(\bar{r}_1)}{\bar{r}_1^2} + K_1(\bar{r}_1) \right] m_1 -$$

$$- \frac{s}{c_2} \left[\frac{2K_0(\bar{r}_2)}{\bar{r}_2} + \frac{4K_1(\bar{r}_2)}{\bar{r}_2^2} + K_1(\bar{r}_2) \right] m_1,$$

из которых, заменив $m_1 = \cos \beta_1$ на $m_2 = \sin \beta_1$, где β_1 — угол наклона радиус-вектора r и оси x_1 , получаем производные по x_2 .

Деформации и напряжения в произвольной точке от действия единичной сосредоточенной нагрузки, приложенной в точке ξ , направленной вдоль оси x_i , записываются в следующем виде:

$$\varepsilon_{11}^* = \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x_1} = a_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \chi}{\partial x_1} m_1^2 - \frac{2\chi}{r} m_1 m_2^2 \right),$$

$$\varepsilon_{21}^* = \frac{\partial u_{21}^*}{\partial x_2} = -a_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} m_1 m_2 - \frac{\chi}{r} m_1 m_2^2 + \frac{\chi}{r} m_1^3 \right),$$

$$\varepsilon_{12}^* = \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_1} = -a_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1} m_1 m_2 + \frac{\chi}{r} m_2^3 - \frac{\chi}{r} m_2 m_1^2 \right),$$

$$\varepsilon_{12}^* = \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_1} = -a_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1} m_1 m_2 + \frac{\chi}{r} m_2^3 - \frac{\chi}{r} m_2 m_1^2 \right),$$

$$\varepsilon_{22}^* = \frac{\partial u_{22}^*}{\partial x_2} = a_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \chi}{\partial x_2} m_2^2 - \frac{2\chi}{r} m_2 m_1^2 \right),$$

$$\gamma_{121}^* = \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^*}{\partial x_1} = a_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \chi}{\partial x_2} m_2^2 + \frac{2\chi}{r} m_2 m_1^2 \right) -$$

$$- a_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1} m_1 m_2 + \frac{\chi}{r} m_2^2 - \frac{\chi}{r} m_2 m_1^2 \right),$$

$$\gamma_{122}^* = \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{22}^*}{\partial x_1} = -a_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} m_1 m_2 - \frac{\chi}{r} m_1 m_2^2 + \frac{\chi}{r} m_1^3 \right) +$$

$$+ a_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \chi}{\partial x_1} m_2^2 + \frac{2\chi}{r} m_1 m_2^2 \right),$$

$$\sigma_{11}^* = 2G \left[(1-\nu) \varepsilon_{11}^* + \nu \varepsilon_{21}^* \right] / (1-2\nu), \quad \sigma_{21}^* = 2G \left[(1-\nu) \varepsilon_{21}^* + \nu \varepsilon_{11}^* \right] / (1-2\nu),$$

$$\sigma_{12}^* = 2G \left[(1-\nu) \varepsilon_{12}^* + \nu \varepsilon_{22}^* \right] / (1-2\nu), \quad \sigma_{22}^* = 2G \left[(1-\nu) \varepsilon_{22}^* + \nu \varepsilon_{12}^* \right] / (1-2\nu),$$

$$\tau_{121}^* = G \gamma_{121}^*, \quad \tau_{122}^* = G \gamma_{122}^*, \quad \tau_{211}^* = \tau_{121}^*, \quad \tau_{212}^* = \tau_{122}^*,$$

$$p_{11}^* = \sigma_{11}^* n_1 + \tau_{211}^* n_2, \quad p_{21}^* = \sigma_{21}^* n_2 + \tau_{121}^* n_1, \quad p_{12}^* = \sigma_{12}^* n_1 + \tau_{212}^* n_2,$$

$$p_{22}^* = \sigma_{22}^* n_2 + \tau_{122}^* n_1,$$

$$a_0 = 1 / 2 \pi r c_2^2 = 1 / 2 \pi G, \quad r = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \right]^{1/2},$$

где G — модуль сдвига; $n_1 = \cos \alpha_1$, $n_2 = \cos \alpha_2$ — направляющие косинусы углов нормали с осями x_1 , x_2 .

Исходя из теоремы взаимности работ, получим интегральное уравнение динамической задачи относительно внутренних перемещений, которое записывается в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} u_i + \int_{\Sigma} p_{ij}^*(\xi, x, s) u_j(x) d\Sigma(x) &= \int_{\Sigma} u_{ij}^*(\xi, x, s) p_j(x) d\Sigma(x) + \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x, s) q_j(x) d\Omega(x). \end{aligned} \quad (10)$$

При стремлении точки ξ к границе Σ области Ω из (10) получим граничное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} c_{ij} u_j(\xi) - \int_{\Sigma} u_{ij}^*(\xi, x, s) p_j(x) d\Sigma(x) + \int_{\Sigma} p_{ij}^*(\xi, x, s) u_j(x) d\Sigma(x) &= \\ = \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x, s) q_j(x) d\Omega(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где $c_{ij} = \delta_{ij} / 2$ для гладкой границы; $i, j = 1, 2$.

Уравнение (11) является сингулярным граничным интегральным уравнением с неизвестными перемещениями и напряжениями на поверхности тела. При решении первой краевой задачи, когда на контуре тела заданы напряжения [7], (11) представляется в виде

$$\begin{aligned} c_{ij} u_j(\xi) + \int_{\Sigma} p_{ij}^*(\xi, x, s) u_j(x) d\Sigma(x) &= \\ = \int_{\Sigma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x, t) d\Sigma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x, s) q_j(x) d\Omega(x), \end{aligned} \quad (12)$$

где неизвестными являются компоненты перемещения $u_j(x, t)$ на контуре тела. Все сказанное относится к внутренней задаче, когда рассматривается конечное тело Ω с поверхностью Σ . При этом тело может быть также многосвязным, т. е. иметь внутри себя полости.

В результате сплайн-аппроксимации граничных параметров взамен интегральных получим систему алгебраических уравнений, которую можно записать в общем виде

$$AX_n = B_{n-1}, \quad (13)$$

где A — блочная матрица $2N$ -го порядка; X_n — вектор неизвестных, соответствующий моменту времени t_n ; B_{n-1} — вектор правой части, соответствующий моменту времени t_{n-1} . Вектор неизвестных X_n состоит из компонентов

вектора перемещений на свободной поверхности и вектора напряжений опорной части. Матричное уравнение (13) представляется в блочной форме

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \{P^0\} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \{Q\}, \quad (14)$$

где A_{11} , A_{21} — прямоугольные матрицы размера $N \times 2N_1$; A_{12} , A_{22} — прямоугольные матрицы размера $N \times 2N_2$; N_1 — число узлов сплайна на закрепленной части границы; $N_2 = N - N_1$; P , U — векторы напряжений и перемещений с $2N_1$ и $2N_2$ элементами соответственно; B_1 , B_2 — прямоугольные матрицы размера $N \times 2N_2$; P^0 — вектор заданной нагрузки, состоящий из $2N_2$ элементов; C_1 , C_2 — прямоугольные матрицы размера $N \times 2M$, M — число ячеек во внутренней области; Q — вектор, учитывающий силы инерции внутри области. Элементы матриц A_{11} и A_{12} состоят из коэффициентов, которые в общем виде записываются так:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+m+1}} B_{m,k}(\alpha) p_{ij}^*(\alpha_k, \alpha, s) J(\alpha) d\alpha, \\ e_{ij} &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+m+1}} B_{m,k}(\alpha) u_{ij}^*(\alpha_k, \alpha, s) J(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

Из решения системы уравнений (13) на каждом шаге определяются компоненты перемещения и поверхностных напряжений в узлах сплайна.

Пусть на часть границы действует кратковременная нагрузка постоянного направления:

$$\bar{p}_j(\alpha, t) = p_0 f(t) \text{ при } 0 \leq t \leq n\tau,$$

$$\bar{p}_j(\alpha, t) = 0 \text{ при } t > n\tau,$$

где $t = 0$ — начало действия нагрузки; p_0 — ее максимум; $f(t)$ — функция, характеризующая форму импульса; $n = 1, 2, \dots$, τ — шаг по времени. Тогда импульс сил, распределенных по поверхности контура, и мгновенный импульс [8] выражаются следующим образом:

$$I = p_0 \int_0^{n\tau} f(t) dt, \quad I_0 = I \varepsilon(n\tau / T_1),$$

где T_1 — основной период собственных колебаний системы; $\varepsilon(n\tau / T_1) \leq 1$ — коэффициент, зависящий от отношения $\tau^* = n\tau / T_1$. При действии мгновенного импульса следует принять $\varepsilon(n\tau / T_1) = 1$ и $I_0 = I$; начальная скорость при $t = 0$ выражается формулой

$$\dot{u}_j = I_0 / \rho,$$

где I_0 — интенсивность импульса, $\text{кН} \cdot \text{с}/\text{м}^2$; ρ — масса единицы объема, $\text{т}/\text{м}^3$.

Величину сосредоточенного импульса при ударной нагрузке I , $\text{кН} \cdot \text{с}$, можно определять приближенно по формуле

$$I = mv_0(1 + k_0),$$

где m — масса ударяющего тела; v_0 — его скорость в начале удара; $k_0 \leq 0,6$ — коэффициент восстановления при ударе [8].

На поверхность сооружения может действовать гармоническая нагрузка:

$$\bar{p}_j(\alpha, t) = p_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T_p} \right) t \right],$$

где T_p — период колебаний нагрузки. Как известно, по мере приближения частоты вынужденных колебаний системы к частоте ее собственных колебаний возрастают амплитуды (перемещения и напряжений) вынужденных колебаний, обусловленные этими воздействиями. Наибольшие амплитуды возникают при резонансе, соответствующем совпадению частот. Следовательно, проведя численные эксперименты при различных значениях T_p , можно определить основную частоту и формы собственных колебаний сооружения.

Кроме силового воздействия на поверхности, возможны и кинематические возмущения, которые передаются через подбласти опорной части сооружения. Эти возмущения в виде сейсмограммы, велисограммы или акселерограммы землетрясений непосредственно можно внести в правую часть граничных уравнений с помощью (7).

Как следует из (14), вектор правой части системы алгебраических уравнений состоит из суммы двух векторов, один из которых формируется от заданной на контуре нагрузки $\bar{p}_j$, а другой — от сил инерции q_j . Для формирования второго вектора требуется определение перемещений, скорости и ускорения во внутренней области тела сооружения. Для этого используется уравнение (11), откуда получаем

$$\begin{aligned} u_i = & \sum_{k=1}^N p_{jk} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+m+1}} B_{m,k}(\alpha) u_{ij}^*(\alpha_k, \alpha, s) J(\alpha) d\alpha - \\ & - \sum_{k=1}^N u_{jk} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+m+1}} B_{m,k}(\alpha) p_{ij}^*(\alpha_k, \alpha, s) J(\alpha) d\alpha + \\ & + \sum_{k=1}^M q_{jk}(\xi, \eta) \int_{\Delta\omega_k} u_{ij}^*(\alpha_k, \alpha, s) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (16)$$

где u_{jk} , p_{jk} — контурные напряжения и перемещения, полученные из решения (13); q_{jk} — сила инерции, вычисленная по (7). Полученное поле перемещений позволяет по (2) и (3) определять компоненты векторов скоростей и ускорений, соответствующие моменту времени t_n .

Таким образом, численное моделирование динамической задачи теории упругости на основе метода граничных уравнений сводится к следующему.

Исходя из начальных условий и в соответствии с граничными условиями формируется вектор свободных членов, соответствующий моменту времени t_0 . Из решения системы уравнений (14) определяются напряжения и перемещения на контуре, соответствующие моменту времени t_1 . По (16) определяются перемещения внутри области, а затем по (2) и (3) вычисляются скорости и ускорения, которые также соответствуют моменту времени t_1 . Для этого же момента времени по (7) вычисляются силы инерции в точках внутренней области. Полученные данные позволяют сформировать вектор правой части и из решения (13) определять контурные параметры, соответствующие моменту времени t_2 . Далее процесс последовательно повторяется.

В качестве примера исследуется поведение сооружения прямоугольного поперечного сечения в условиях плоской деформации от действия горизонтальной вибрационной нагрузки, приложенной к левой вертикальной грани в предположении, что нижняя часть прикреплена к абсолютно жесткому основанию (рис. 1).

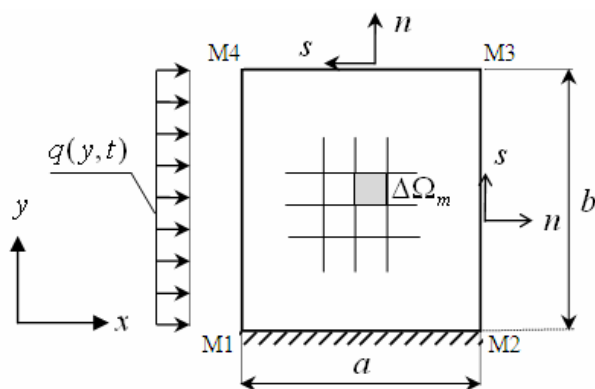


Рис. 1. Тестовая задача

Проведены численные эксперименты от действия равномерно распределенной по вертикальной грани гармонической нагрузки при постепенном изменении периода вынужденных колебаний T_p :

$$q(y, t) = q_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T_p} \right) t \right],$$

На рис. 2 показано горизонтальное перемещение точки M4 верхнего левого угла при $a = b = 10$ м. Результаты получены при аппроксимации контура В-сплайном нулевого порядка и разбивке области сеткой 10×10 и следующих данных:

$$E = 2,57 \cdot 10^4 \text{ МПа } (2,57 \cdot 10^6 \text{ тс/м}^2),$$

$$\nu = 0,2,$$

$$\rho = 2,5 \text{ т/м}^3,$$

$$\tau = \Delta x / c_1 = 0,2987 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Кривые 1, 2, 3 получены при периоде вынужденных колебаний T_p , равном 0,00375, 0,0045 и 0,00525 с соответственно. Видно, что при $T_p = 0,0045$ с происходит резкое возрастание перемещения, что свидетельствует о резонансе. Следовательно, основной период свободных колебаний системы $T_1 = 0,0045$ с. Следует отметить, что основной период свободных колебаний системы для аналогичного сооружения размером $10 \times 10 \times 1$ м, рассчитанного по программе ЛИРА, составил $T_1 = 0,0041$ с.

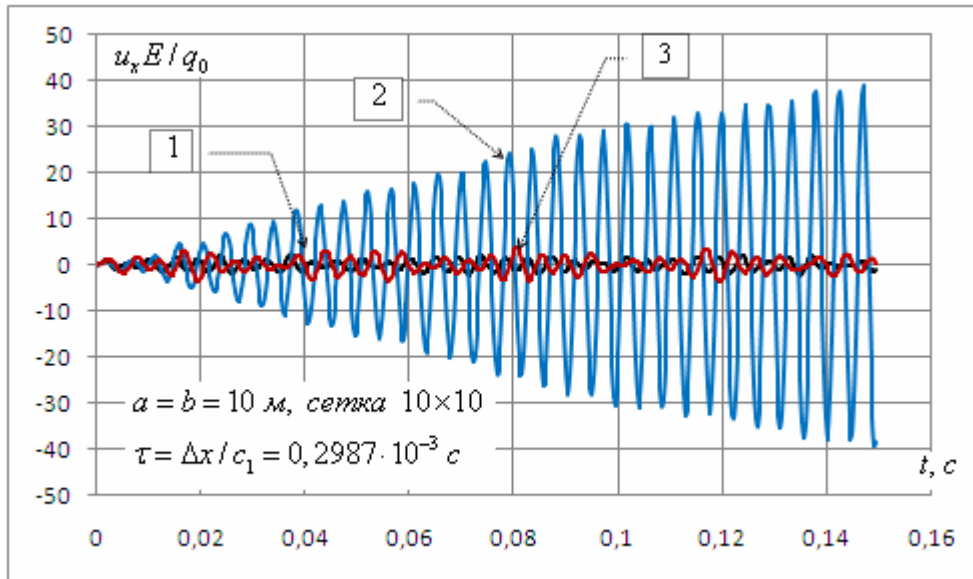


Рис. 2. Графики изменения горизонтального перемещения точки М4 при различных значениях T_p

Таким образом, разработан алгоритм численного решения плоской динамической задачи теории упругости методом граничных уравнений. Установлено, что для сооружения прямоугольного поперечного сечения размером 10×10 м в условиях плоской деформации от действия горизонтальной вибрационной нагрузки, приложенной к левой вертикальной грани, при периоде вынужденных колебаний этой нагрузки, равном $T_1 = 0,0045$, происходит резкое возрастание перемещения, что свидетельствует о возникновении явления резонанса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Низомов Д. Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. М. : АСВ, 2000. 282 с.
2. Doyle J. M. Integration of the Laplace transformed equations of classic elastokinetics // Journal mathematical analysis and applications. 1966. Vol. 13.
3. Cruse T. A., Rizzo F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem // Journal mathematical analysis and applications. 1968. V. 22. P. 341—355.
4. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М. : Мир, 1987. 524 с.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М. : Иностранная литература, 1949. Т. 1. 798 с., Т. 2. 220 с.

6. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М. : Наука, 1979. 830 с.

7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.

8. *Сорокин Е. С.* Инструкция по расчету перекрытий на импульсивные нагрузки. М. : Стройиздат, 1966. 134 с.

1. *Nizomov D. N.* Metod granichnykh uravneniy v reshenii staticheskikh i dinamicheskikh zadach stroitel'noy mekhaniki. M. : ASV, 2000. 282 s.

2. *Doyle J. M.* Integration of the Laplace transformed equations of classic elastokinetics // Journal mathematical analysis and applications. 1966. Vol. 13.

3. *Cruse T. A., Rizzo F. J.* A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem // Journal mathematical analysis and applications. 1968. V. 22. P. 341—355.

4. *Brebbiya K., Teles Zh., Vroubel L.* Metody granichnykh elementov. M. : Mir, 1987. 524 s.

5. *Vatson G. N.* Teoriya besselevykh funktsiy. M. : Inostrannaya literatura, 1949. T. 1. 798 s., T. 2. 220 s.

6. *Abramovits M., Stigan I.* Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i tablitsami. M. : Nauka, 1979. 830 s.

7. *Muskhelishvili N. I.* Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M. : Nauka, 1966. 707 s.

8. *Sorokin E. S.* Instruksiya po raschetu perekrytiy na impul'sivnye nagruzki. M. : Stroyizdat, 1966. 134 s.

© *Ходжибоев А. А.*, 2013

*Поступила в редакцию
в январе 2013 г.*

Ссылка для цитирования:

Ходжибоев А. А. Численное моделирование динамической задачи теории упругости методом граничных уравнений // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2013. Вып. 1(25). URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Khodziboev-2013_1\(25\)_1.pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Khodziboev-2013_1(25)_1.pdf)