

УДК 624.04

А. А. Ходжибоев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОТИНЫ С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ ОСНОВАНИЯ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе представлены некоторые новые результаты исследования напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной плотины с учетом податливости основания, полученные численным моделированием на основе метода граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: численное моделирование, граничные уравнения, фундаментальное решение, численное решение, граничные элементы.

This paper presents some new research results of the stress-strain state of a piecewise inhomogeneous dam, obtained by numerical simulation based on the method of boundary integral equations. The mathematical model of the solution of the static interaction of the piecewise homogeneous body with an elastic half-space under plane strain conditions, which allows us to study the stress-strain state of inhomogeneous dam and can be implemented to solve practical problems.

Key words: numerical modeling, boundary equations, fundamental solution, numerical solution, boundary elements.

Напряженно-деформированное состояние плотин, в частности земляных, в значительной степени определяется физико-механическими характеристиками их оснований. Расчетную модель земляной плотины с центральным ядром и упорными призмами из горной массы можно представить как конечное кусочно-однородное тело, которое опирается на упругое однородное полупространство.

Рассмотрим решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния неоднородной плотины на основе модели «основание — сооружение» в условиях плоской деформации. При этом предполагается, что упорные призмы могут иметь разные физико-механические характеристики, которые отличаются от характеристики ядра, а деформируемое основание является однородным. Таким образом, неоднородная область, состоящая из трех подобластей с общей линией основания и соответствующими объемными силами и действующей нагрузкой, моделирует статическое состояние плотины с центральным ядром. Исходя из условий непрерывности на контактных границах и заданной нагрузки, формулируется краевая задача исследования напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной плотины.

Введем обозначения: Ω_0 — внутренняя область полупространства; Γ_0 — часть граничной поверхности полупространства, на которой опирается плотина; Γ_∞ — граница на бесконечности; $\Omega_k + \Gamma_k$ ($k = 1, 2, 3$) — подобласти, из которых состоит тело плотины; μ_0, ν_0 — упругие постоянные полупространства; μ_k, ν_k ($k = 1, 2, 3$) — упругие постоянные соответствующих подобластей плотины; $P^0 = (p_x^0, p_y^0)$ — напряжения, заданные на внешней поверхности плотины; $q = (q_x, q_y)$ — объемные силы; $\rho_k = \gamma_k/g$ — плотность, γ_k — объемный вес, g — ускорение свободного падения; n — внешняя нормаль к поверхности тела; n, s — локальная система координат; x, y — глобальная система координат.

Предполагая, что перемещения и напряжения на контурах имеют кусочно-постоянный характер изменения, строим расчетную модель системы «основание — сооружение», которая показана на рис. 1, где через M1, M2, ..., M15 обозначены номера крайних точек контуров (элементов). Обозначения NS1, NS2, ..., NS15, с одной стороны, указывают на последовательность расположения контуров при их обходе с целью интегрирования, а с другой — несут информацию о количестве постоянных граничных элементов на данной поверхности. Элементы NS7 и NS12 были использованы как вспомогательные при переходе из одной подобласти в другую, а затем были исключены из алгоритма.

Итого в расчетной модели принимают участие 13 элементов, 10 из которых являются контактными границами, а 3 принадлежат внешней поверхности плотины. На контактных границах выполняются условия непрерывности для компонентов перемещений и напряжений, которые относительно глобальной системы координат записываются в виде

$$u_x(k) = u_x(m), \quad u_y(k) = u_y(m), \quad p_x(k) = -p_x(m), \quad p_y(k) = -p_y(m), \quad (1)$$

где $n, s = 0, 1, 2, 3$ — точки на границах соответствующих подобластей.

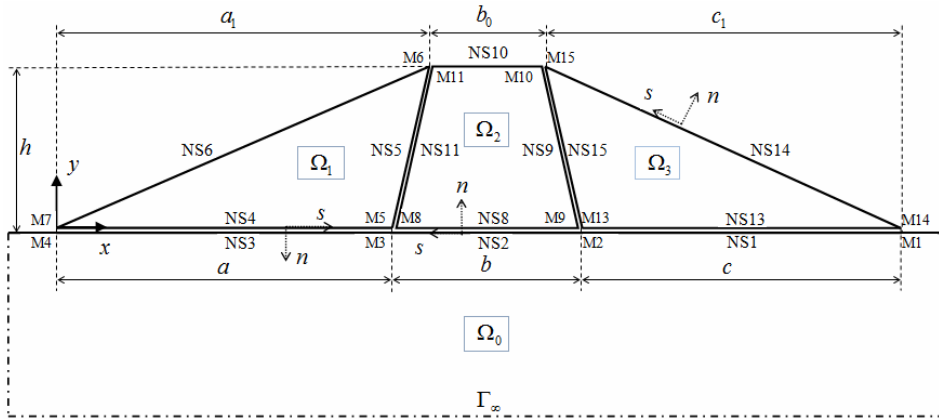


Рис. 1. Модель неоднородной плотины, взаимодействующей с полупространством

Дискретное преобразование граничных интегральных уравнений, записанных для полуплоскости и кусочно-однородного тела плотины, приводит к четырем системам алгебраических уравнений, которые могут быть представлены в матричной форме [1]. На граничной поверхности Γ_0 , которая состоит из элементов NS1, NS2 и NS3, матричное уравнение записывается в виде

$$\begin{bmatrix} A_0 & 0 & -E_0 & -F_0 \\ 0 & D_0 & -G_0 & -H_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (2)$$

где блочные векторы перемещений и напряжений состоят из аналогичных векторов, соответствующих трем элементам поверхности основания:

$$U = (U_x \ U_y), \quad P = (P_x \ P_y), \quad U_x = (U_{x1} \ U_{x2} \ U_{x3}),$$

$$U_y = (U_{y1} \ U_{y2} \ U_{y3}), \ P_x = (P_{x1} \ P_{x2} \ P_{x3}), \ P_y = (P_{y1} \ P_{y2} \ P_{y3}),$$

где $U_{xi} = (u_x)_i$ ($i = 1, 2, 3$) — вектор-столбец перемещений i -го контура;
 $P_{xi} = (p_x)_i$ ($i = 1, 2, 3$) — вектор-столбец напряжений.

Квазидиагональные матрицы A_0 и D_0 содержат блоки из единичных матриц, а блочные матрицы E_0, F_0, G_0, H_0 являются квадратными порядка $N_0 = NS1 + NS2 + NS3$, вдоль диагонали которых расположены квадратные подматрицы

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \ E_0 = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение, соответствующее подобласти Ω_1 с тремя контурными элементами (NS4, NS5, NS6), два из которых (NS4, NS5) являются контактными границами, представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & E_1 & F_1 \\ C_1 & D_1 & G_1 & H_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ G_1 & H_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^0 \\ P_y^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_{1x} \\ Q_{1y} \end{Bmatrix}, \\ & U = (U_x \ U_y), \ P = (P_x \ P_y), \ U_x = (U_{x4} \ U_{x5} \ U_{x6}), \\ & U_y = (U_{y4} \ U_{y5} \ U_{y6}), \ P_x = (P_{x4} \ P_{x5}), \ P_y = (P_{y4} \ P_{y5}), \\ & A_1 = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}, \ E_1 = \begin{bmatrix} E_{44} & -E_{45} \\ E_{54} & -E_{55} \\ E_{64} & -E_{65} \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где Q_{1x}, Q_{1y} — векторы объемных сил; A_1, B_1, C_1, D_1 — блочные квадратные матрицы порядка $N_1 = NS4 + NS5 + NS6$; E_1, F_1, G_1, H_1 — прямоугольные матрицы размера $N_1 \times (NS4 + NS5)$.

Подобласть $\Omega_2 + \Gamma_2$ составляют тела ядра плотины, контур которого состоит из трех элементов контактной границы (NS8, NS9, NS11) и одного элемента гребня NS10. Система уравнений для этой подобласти представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & E_2 & F_2 \\ C_2 & D_2 & G_2 & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 & F_2 \\ G_2 & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^0 \\ P_y^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_{2x} \\ Q_{2y} \end{Bmatrix}, \\ & U = (U_x \ U_y), \ P = (P_x \ P_y), \\ & U_x = (U_{x8} \ U_{x9} \ U_{x10} \ U_{x11}), \ U_y = (U_{y8} \ U_{y9} \ U_{y10} \ U_{y11}), \\ & P_x = (P_{x8} \ P_{x9} \ P_{x11}), \ P_y = (P_{y8} \ P_{y9} \ P_{y11}), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где блочные матрицы A_2, B_2, C_2, D_2 являются квадратными порядка $N_2 = NS8 + NS9 + NS10 + NS11$, а блочные матрицы E_2, F_2, G_2, H_2 — прямоугольные, размера $N_2 \times (NS8 + NS9 + NS11)$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{88} & A_{811} & A_{89} & A_{810} \\ A_{98} & A_{911} & A_{99} & A_{910} \\ A_{108} & A_{1011} & A_{109} & A_{1010} \\ A_{118} & A_{1111} & A_{119} & A_{1110} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} E_{88} & E_{811} & -E_{89} \\ E_{98} & E_{911} & -E_{99} \\ E_{108} & E_{1011} & -E_{109} \\ E_{118} & E_{1111} & -E_{119} \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение для низовой призмы плотины, которая занимает подобласть $\Omega_3 + \Gamma_3$, где NS13 и NS15 являются элементами контактной поверхности, записывается аналогично (3):

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_3 & B_3 & E_3 & F_3 \\ C_3 & D_3 & G_3 & H_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 & F_3 \\ G_3 & H_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^0 \\ P_y^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_{3x} \\ Q_{3y} \end{Bmatrix}, \\ & U = (U_x \ U_y), \ P = (P_x \ P_y), \ U_x = (U_{x13} \ U_{x15} \ U_{x14}), \\ & U_y = (U_{y13} \ U_{y15} \ U_{y14}), \ P_x = (P_{x13} \ P_{x15}), \ P_y = (P_{y13} \ P_{y15}), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где блочные матрицы A_3, B_3, C_3, D_3 — квадратные порядка $N3 = NS13 + NS14 + NS15$, а E_3, F_3, G_3, H_3 — прямоугольные, размера $N3 \times (NS13 + NS15)$:

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{1313} & A_{1315} & A_{1314} \\ A_{1413} & A_{1415} & A_{1414} \\ A_{1513} & A_{1515} & A_{1514} \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} E_{1313} & E_{1315} \\ E_{1413} & E_{1415} \\ E_{1513} & E_{1515} \end{bmatrix}.$$

Окончательную систему уравнений для всей области получаем объединением (2—5) с учетом условий совместности и равновесия на контактных границах (1). В результате получим систему разрешающих уравнений, которую можно представить в компактной форме:

$$[A]\{X\} = \{B\}, \quad (6)$$

где вектор неизвестных состоит из четырех блоков:

$$\{X\} = (U_x \ U_y \ P_x \ P_y),$$

состоящих из компонентов перемещений и напряжений, принадлежащих 13 контурным элементам:

$$\begin{aligned} U_x &= (U_{x1} \ U_{x2} \ U_{x3} \ U_{x5} \ U_{x6} \ U_{x9} \ U_{x10} \ U_{x14}), \\ U_y &= (U_{y1} \ U_{y2} \ U_{y3} \ U_{y5} \ U_{y6} \ U_{y9} \ U_{y10} \ U_{y14}), \\ P_x &= (P_{x1} \ P_{x2} \ P_{x3} \ P_{x5} \ P_{x9}), \quad P_y = (P_{y1} \ P_{y2} \ P_{y3} \ P_{y5} \ P_{y9}). \end{aligned}$$

Вектор свободных членов формируется с учетом объемных сил и нагрузки, заданной на гранях плотины, а также от фильтрационного противодействия на подошву плотины:

$$\{B\} = (0 \ B_1 \ B_2 \ B_3).$$

На втором этапе расчета вычисляются компоненты векторов перемещений и напряжений в локальной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_x \cos \alpha_1 + u_y \sin \alpha_1, \quad u_s = -u_x \sin \alpha_1 + u_y \cos \alpha_1, \\ \sigma_n &= p_x \cos \alpha_1 + p_y \sin \alpha_1, \quad \tau_{ns} = -p_x \sin \alpha_1 + p_y \cos \alpha_1, \\ \sigma_s &= (2\mu\varepsilon_s + \nu\sigma_n)/(1-\nu), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где α_1 — угол наклона нормали к оси x ; μ — модуль сдвига; $\varepsilon_s = \partial u_s / \partial s$; ν — коэффициент Пуассона.

Третий этап расчета связан с определением перемещения и напряжения в точках $\xi \in \Omega_k$ внутри подобластей. Поля перемещений во внутренних точках описываются формулой Соммильяна [2], которую можно представить в дискретной форме:

$$\left. \begin{aligned} u_{xi} &= -\sum_N a_{ij} u_{xj} - \sum_N b_{ij} u_{yj} + \sum_N e_{ij} p_{xj} + \sum_N f_{ij} p_{yj} + \sum_N Q_{1ij}, \\ u_{yi} &= -\sum_N c_{ij} u_{xj} - \sum_N b_{ij} u_{yj} + \sum_N g_{ij} p_{xj} + \sum_N h_{ij} p_{yj} + \sum_N Q_{2ij}, \\ (i &= 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где N — число постоянных граничных элементов на контуре подобласти, M — число точек внутри подобласти.

Поля перемещений (8) для каждой подобласти вычисляются отдельно. Также можно определить компоненты перемещений как во внутренних точках $\xi \in \Omega_0$ полуплоскости, так и в точках $\xi \in \Gamma_0$ на ее поверхности. Исходя из геометрических уравнений

$$\varepsilon_x = \partial u_x / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial u_y / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y, \quad (9)$$

поля деформаций можно определить численным дифференцированием, например конечно-разностной аппроксимацией. Напряженное состояние подобластей для случая плоской деформации характеризуется физическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]/(1-2\nu), \quad \sigma_y = 2\mu[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x]/(1-2\nu), \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом, предлагаемый алгоритм расчета (6—10) позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние неоднородной плотины с учетом податливости основания от действия различных статических нагрузок, в том числе сейсмических.

Пример. Реализацию алгоритма рассмотрим на примере неоднородной плотины (рис. 2), на которую могут действовать следующие нагрузки [3]:

- вес плотины q_k ;
- гидростатическое давление со стороны верхнего бьефа W_1 ;
- фильтрационное противодавление на подошву плотины W_2 ;
- давление волн W_3 ;

гидростатическое давление со стороны нижнего бьефа W_4 ;

сейсмическое воздействие S_1 ;

действия бегущей волны на подошву плотины S_2 . Численные исследования проведены на примере неоднородной земляной плотины со следующими геометрическими параметрами:

$$a = c = 160 \text{ м};$$

$$b = 60 \text{ м};$$

$$h = 87 \text{ м};$$

$$h_0 = 82 \text{ м};$$

$$a_1 = c_1 = 172 \text{ м};$$

$$b_0 = 36 \text{ м};$$

и упругими параметрами грунта основания, упорных призм и ядра:

$$\nu_0 = 0,3; \nu_1 = \nu_3 = 0,3; \gamma_1 = \gamma_3 = 2,2 \text{ т/м}^3;$$

$$\nu_2 = 0,4; \gamma_2 = 2,2 \text{ т/м}^3;$$

$$1 - E_0 = 2,4 \cdot 10^4; E_1 = E_3 = 1,2 \cdot 10^4; E_2 = 0,6 \cdot 10^4 \text{ т/см}^2;$$

$$2 - E_0 = E_1 = E_2 = E_3 = 2,4 \cdot 10^4 \text{ т/см}^2;$$

$$3 - E_0 = 1,2 \cdot 10^4; E_1 = E_3 = 1,2 \cdot 10^4; E_2 = 2,4 \cdot 10^4 \text{ т/см}^2.$$

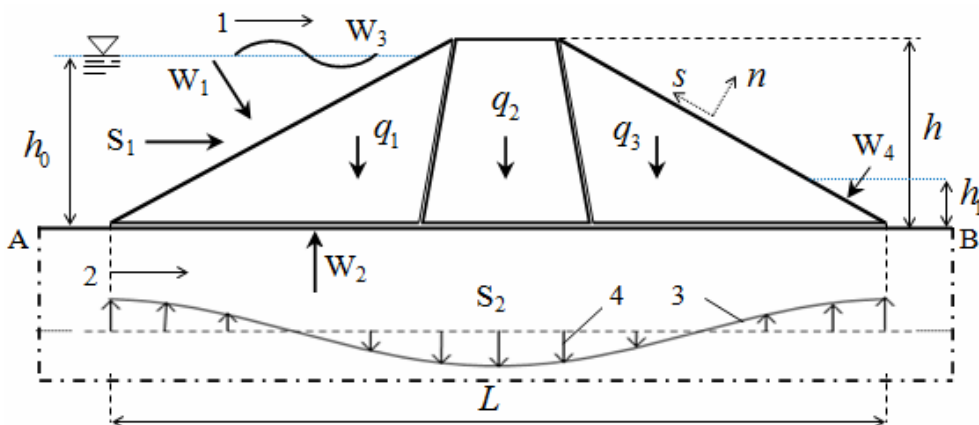


Рис. 2. Нагрузки, действующие на плотину: 1, 2 — направление распространения волн; 3 — форма волны; 4 — направление ускорений

Результаты (рис. 3—6) получены при дискретном представлении всей границы на 154 постоянных граничных элементов.

В заключении следует отметить, что наибольшие тангенциальные напряжения возникают в центре самого нижнего элемента линии верхнего бьефа (см. рис. 3); растягивающие нормальные напряжения возникают на линии контакта между левой упорной призмой и поверхностью полупространства (приблизительно три восьмых части длины подошвы плотины начиная с левого края) (см. рис. 4); распределения тангенциальных напряжений на контуре ядра плотины (см. рис. 5) показывает, что разность механических характеристик частей неоднородного тела влияет лишь количественно; так как в предлагаемой модели принята двухсторонняя связь, то для восприятия растягивающих нормальных напряжений (см. рис. 6) требуется принятие конструктивных мер.

Таким образом, предлагаемая математическая модель решения задачи статического взаимодействия кусочно-однородного тела с упругим полупространством в условиях плоской деформации позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние неоднородных плотин и может быть реализована для решения практических задач.

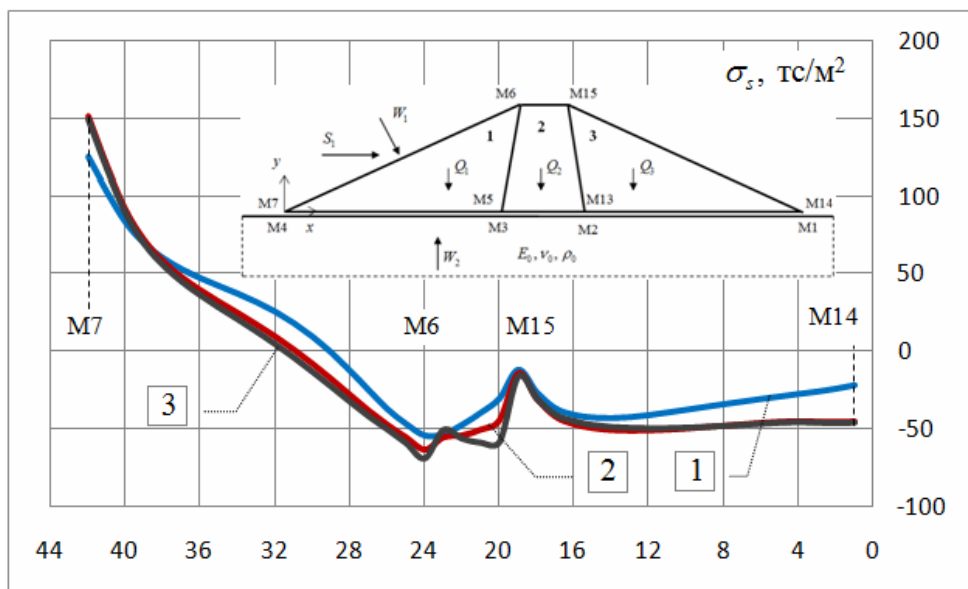


Рис. 3. Распределение тангенциальных напряжений на внешней поверхности плотины

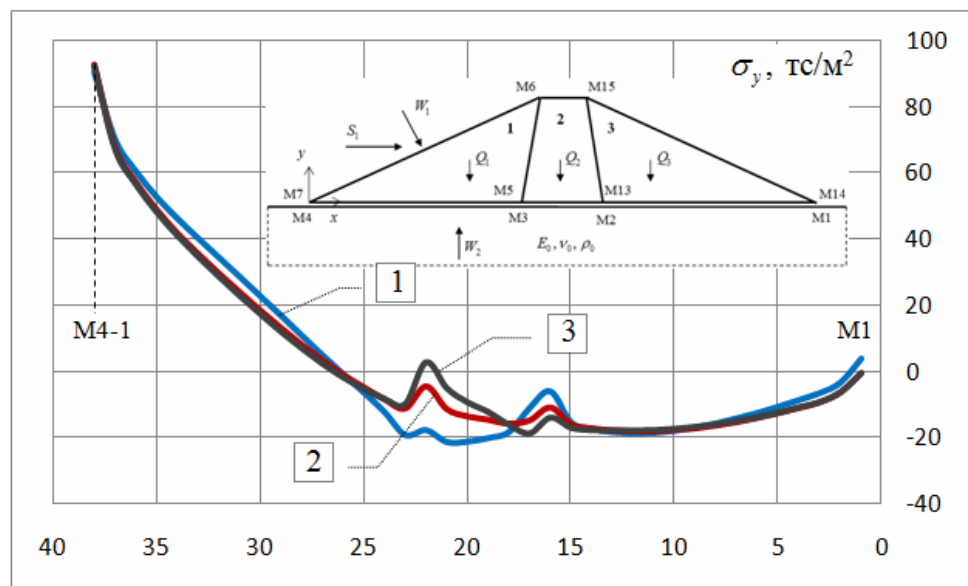


Рис. 4. Распределение нормальных напряжений на поверхности основания

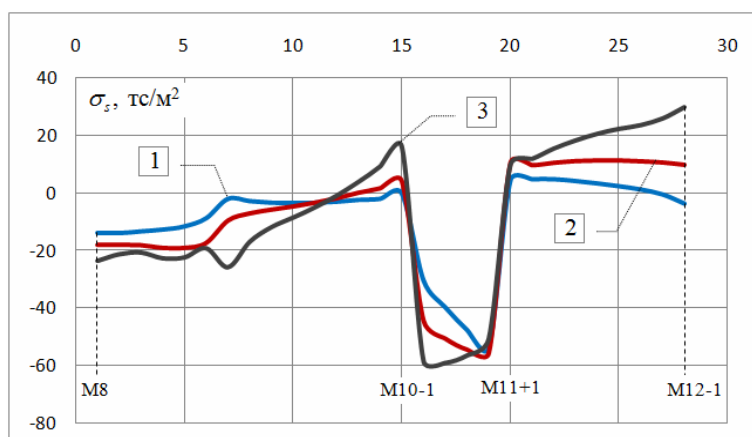


Рис. 5. Распределение тангенциальных напряжений на контуре ядра плотины

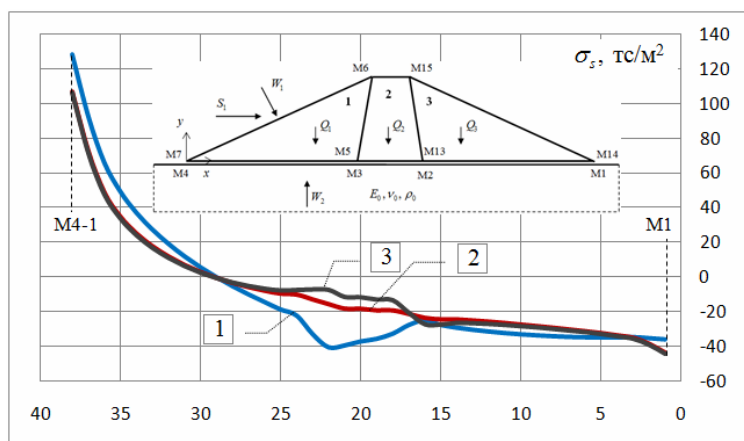


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений на контуре полуплоскости

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Низомов Д. Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. М. : АСВ, 2000. 282 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир, 1975. 872 с.
3. Бетонные плотины (на скальных основаниях) / М. М. Гришин, Н. П. Розанов, Л. Д. Белый и др. М. : Стройиздат, 1975. 352 с.
1. Nizomov D. N. Metod granichnykh uravneniy v reshenii staticheskikh i dinamicheskikh zadach stroitel'noy mekhaniki. M. : ASV, 2000. 282 s.
2. Novatskiy V. Teoriya uprugosti. M. : Mir, 1975. 872 s.
3. Betonnye plotiny (na skal'nykh osnovaniyakh) / M. M. Grishin, N. P. Rozanov, L. D. Belyy dr. M. : Stroyizdat, 1975. 352 s.

© Ходжибоев А. А., 2013

Поступила в редакцию
в январе 2013 г.

Ссылка для цитирования:

Ходжибоев А. А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния неоднородной плотины с учетом податливости основания методом граничных уравнений // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2013. Вып. 1(25). URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Khodzhiboev-2013_1\(25\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Khodzhiboev-2013_1(25).pdf)