УДК 624.073:517.95

С. Ю. Катеринина, М. А. Катеринина

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Дан обзор трех наиболее известных численных методов расчета конструкций с разрывными параметрами — метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод последовательных аппроксимаций. Приведены достоинства и недостатки этих методов.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: конструкции с разрывными параметрами, дифференциальное уравнение, метод сеток, метод конечных элементов, метод последовательных аппроксимаций.

The article provides a review of the three most well-known numerical methods of analysis of construction with discontinuous parameters — the finite differences method, the finite elements method, the method of successive approximations. The authors show the advantages and disadvantages of these methods.

K e y   w o r d s: construction with discontinuous parameters, differential equation, net method, finite element method, method of successive approximations.

Применение в строительстве все более сложных инженерных решений сделало необходимой разработку численных методов, максимально точно учитывающих работу элементов конструкций с разрывными параметрами.

Наиболее распространенными в настоящее время и используемыми на практике численными методами являются метод конечных разностей (МКР), называемый также методом сеток, метод конечных элементов (МКЭ) и метод последовательных аппроксимаций (МПА).

МКР — метод конечных разностей (метод сеток)

МКР является одним из самых мощных аппаратов вычислительной математики, с помощью которого решаются разнообразные задачи из различных областей науки. Он используется для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных.

Весь процесс расчета по МКР можно условно разделить на пять этапов:

замена области непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения, т. е. нанесение сетки узлов на рассматриваемую область;

замена дифференциального оператора, описывающего задачу, некоторым разностным оператором на введенной сетке узлов (так называемый прямой ход);

формулировка разностного аналога для граничных условий;

решение полученной в результате осуществления первых трех этапов алгебраической системы конечно-разностных уравнений;

интерполяция полученных решений на дискретном множестве точек сетки на всю область определения решения исходной задачи (обратный ход).

При выводе исходных уравнений МКР возможны различные подходы, базирующиеся на тех или иных принципах. В одном из них производится формальная замена производных, входящих в той или иной комбинации в исходное дифференциальное уравнение, их аналогами, выраженными через дискретные значения функции в узлах сетки [1, 2]. Самым простым вариантом является формальная замена дифференциальных уравнений соответствующими разностными:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(i,k)} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} = \Delta_i\left(u_{i,k}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(i,k)} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2h} = \Delta_k\left(u_{i,k}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,k)} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{h^2} = \Delta_i^2\left(u_{i,k}\right) \text{ и т. д.}$$

Формулы для производных, а также оценки их погрешности получаем, применяя разложение искомой функции в ряд Тейлора [1, 2]. Использование такого подхода позволяет рассматривать не только прямоугольную сетку узлов, но и треугольную, параллелограммную и др. От того, насколько исходное дифференциальное уравнение удовлетворяется при этом в окрестности узла, зависит точность решения при данном числе узлов сетки.

В другом подходе в качестве пробных функций используются функции с конечным носителем, т. е. такие, которые только в сравнительно небольшой (порядка шага сетки) окрестности отличны от нуля, а вне ее тождественно равны нулю. При этом используется вариационный метод вывода сеточных уравнений как более общий и обладающий возможностью учитывать сложные краевые условия в рамках точности аппроксимации производных конечными разностями.

Вывод конечно-разностных уравнений может быть осуществлен и следующим образом. Выбирается та или иная функция (обычно в виде алгебраического или тригонометрического полинома), которая точно или приближенно удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению не только в самом узле, но и в окрестностях узла сетки или, во всяком случае, позволяет судить о поведении функции за пределами данного узла.

По этим уточненным конечно-разностным уравнениям для определенного класса сложных распределенных нагрузок можно получить точные решения, в то время как обычные конечно-разностные уравнения (при одном и том же числе узлов) дают значительную погрешность.

Необходимо помнить, однако, что при построении разностной аппроксимации той или другой точности, решение уравнения имеет соответствующее необходимое число производных. Это накладывает определенные требования на коэффициенты уравнения, на область и на функции, входящие в краевые условия.

Если они таковы, что решение может иметь производные только до какого-то определенного порядка, то не имеет никакого смысла при решении задачи методом сеток использовать аппроксимацию более высокого порядка, так как их использование лишь усложнит работу, не улучшив результат.

МКЭ — метод конечных элементов

Исторически, возникновение метода конечных элементов было связано с идеей приложения хорошо разработанных классических методов расчета статически неопределимых стержневых систем в матричной форме к решению двух- и трехмерных задач теории упругости. Осуществление и развитие этой идеи тесно связано с быстрым развитием вычислительной техники.

Первоначально развитие МКЭ шло по двум направлениям. С одной стороны, он разрабатывался на основе идей, используемых в строительной механике стержневых систем. С другой стороны, МКЭ развивался как некоторая разновидность вариационно-разностного метода решения задач математической физики. В дальнейшем оба эти направления объединились.

Для практических целей можно трактовать МКЭ как обобщение методов строительной механики стержневых систем на расчет любых сложных систем (континуальных, дискретных, дискретно-континуальных, то есть систем, элементы которых можно рассматривать как самостоятельные конструкции — пластинки, плиты, оболочки, стержни, пространственные тела и др.).

Последовательность расчета при этом будет единой, несмотря на все многообразие конечных элементов, на которые могут быть расчленены конкретные конструкции. Определение связи между узловыми усилиями и узловыми перемещениями конечного элемента (построение матрицы жесткости, матрицы податливости, матрицы упругих свойств в общем случае) является одним из основных этапов приложения МКЭ к расчету конструкций. Так как конечные элементы, на которые расчленяется исходная конструкция, имеют вдоль своей границы непрерывные или дискретные связи со смежными элементами, то при построении расчетной дискретной модели вводятся априорные предположения о характере силового или кинематического воздействия на границах между смежными элементами. От выбора функций, аппроксимирующих силовые или кинематические воздействия на границах между элементами, зависит сходимость решения к точному методу.

Таким образом, МКЭ имеет, с одной стороны, сеточный характер (разбивка области сеткой узлов на конечные элементы) и, с другой стороны, вариационный характер (решение непосредственно вариационной задачи при построении матрицы жесткости КЭ). Это позволило объединить в МКЭ преимущества сеточных и вариационных методов решения задач математической физики.

Решающее преимущество МКЭ по сравнению с вариационными методами состоит в том, что координатные функции в МКЭ отличны от нуля только в окрестности соответствующего узла и, следовательно, носят локальный характер.

Последовательность решения задач механики по МКЭ (в форме метода перемещений) следующая:

нанесение сетки расчетных узлов, в которых определяется значение разрешающей функции, и расчленение исходной системы на КЭ;

построение матриц жесткости конечных элементов;

составление системы канонических уравнений, отражающих кинематическую совместимость расчетной схемы;

решение системы уравнений и вычисление значений разрешающей функции в расчетных узлах;

определение компонентов напряженно-деформированного состояния исследуемой системы по найденным значениям разрешающей функции в расчетных узлах сетки.

Традиционные методы расчета стержневых систем имеют ту же последовательность.

Однако, опыт практического использования данного метода показал, что МКЭ, несмотря на успехи компьютерной техники, всемогущ только теоретически. На практике применение МКЭ к расчету сложных инженерных конструкций, в особенности конструкций с разрывными параметрами, встречает большие трудности.

Ведь для получения достаточной точности расчета требуется представлять конструкцию в виде совокупности очень большого числа конечных элементов и сильно сгущать сетку элементов вблизи разрывов и особенностей конструктивных элементов. Как следствие — большой объем необходимых для расчета исходных данных и необходимость обработки значительных объемов информации, что оказывается затруднительным даже при использовании современной компьютерной техники.

МПА — метод последовательных аппроксимаций

В конце 50-х гг. XX в. А. Ф. Смирновым [3] была развита идея о выражении младших производных некоторой функции (например, функции прогибов) через старшие с помощью матрицы интегрирования, которая строится с использованием полиномов Лагранжа. Применение разработанного на этой основе метода к решению одномерных задач строительной механики показало высокую точность при сравнительно небольшом числе разбиений участка интегрирования.

А. В. Александров [4] с использованием полиномов Лагранжа построил матрицу дифференцирования, последовательное применение которой позволяло переводить функцию в ее первую производную, последнюю — во вторую производную и так далее. В конечном итоге представляющая интерес старшая производная с использованием формул численного дифференцирования выражалась через искомую функцию. Применение метода к решению обыкновенных дифференциальных уравнений показало его высокую точность. Предложенная в [4] методика решения оказалась и более гибкой в смысле учета краевых условий задачи. Там же высказывалась также мысль об эффективности одновременного применения матриц интегрирования и дифференцирования при решении некоторых задач.

Было доказано [4], что матрицы интегрирования [3] и дифференцирования [4], взятые без начальной строки и начального столбца, являются взаимно обратными. В работе Б. Я. Лащеникова [5] установлено, что методы решения дифференциальных уравнений, предложенные в [3] и [4], приводят к одним и тем же результатам. Эти два важных обстоятельства говорят о том, что в [3] и [4] были предложены две разные формы по существу одного и того же метода. Этот метод впоследствии был назван Р. Ф. Габбасовым [6] методом последовательных аппроксимаций (МПА). В этом методе полином, аппроксимирующий искомую функцию, выражается через узловые значения этой функции, а полином (того же порядка), аппроксимирующий первую производную функции, выражается через узловые значения этой производной. Методика расчета, использующая матрицу дифференцирования из работы [4], была распространена на двумерные задачи В. А. Смирновым [7]. Им же показано применение метода к расчету пластин на упругом основании и к расчету плит на динамические нагрузки. Высокая точность метода при сравнительно небольшом числе разбиений была подтверждена им для этих случаев.

Заполненность матриц интегрирования [3] и дифференцирования [4], трудности, возникающие при построении этих матриц в случае неравномерной сетки, являются достаточно серьезными недостатками этой методики расчета.

М. В. Борисовым и М. Б. Вахитовым [8] недостатки метода МПА были устранены модифицированными матрицами интегрирования, построенными с помощью «скользящих» парабол, позволяющих получить много нулевых элементов, и как следствие этого, упростить формирование матриц интегрирования. Решения при этом являются сходящимися. Но алгоритм расчета, предложенный в вышеуказанных работах, особенно для задач с разрывами, все же остается сложным, поэтому применяется ими в основном к одномерным задачам.

Одновременное обеспечение высокой точности и простоты метода, приводящего к сходящимся решениям, достигается последовательной аппроксимацией искомой функции и ее производных кусочно-полиномиальными функциями (сплайнами) или функциями, обобщающими понятие сплайна.

Дальнейшее развитие метода последовательных аппроксимаций (МПА) нашло отражение в работах Р. Ф. Габбасова, в которых матрицы интегрирования и дифференцирования строились с использованием кусочно-полиномиальных функций и были применены к решению двумерных задач строительной механики и теории упругости.

Построенные матрицы интегрирования учитывали конечные разрывы искомой функции и ее производных. Однако более гибкой оказалась форма метода, использующая матрицы дифференцирования, построенные с применением функций, обобщающих понятие сплайн, т. е. учитывающих конечные разрывы на границах стыкуемых участков. Исследования отечественных и зарубежных авторов показали, что наиболее удобной для практического применения является модификация МПА, приводящая к уравнениям, близким по структуре, к разностным уравнениям МКР повышенной точности.

Вместе с этим необходимо отметить, что размерность матриц интегрирования и дифференцирования увеличивается с увеличением числа шагов разбивочной сетки, поэтому МПА практически невозможно использовать для создания универсальной автоматизированной системы расчета.

Проведенный выше краткий обзор только подтверждает, что каждый численный метод имеет свою область применения. Выбор метода зависит от типа программно-инструментальной среды (иными словами — от вида применяемой компьютерной технологии) и от характера решаемой задачи. К этому следует добавить, что достоверность результатов решения новой сложной задачи рациональнее установить, решая эту задачу хотя бы двумя независимыми друг от друга численными методами при разумном числе разбиений, нежели численно исследовать сходимость решения по одному методу, значительно увеличивая число разбиений по сравнению с первоначальным.

Подводя итоги, можно отметить следующее:

1. Метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ) в их различных модификациях являются на сегодняшний день наиболее разработанными теоретически и наиболее широко используемыми численными методами в решении широкого круга задач математической физики. Однако, проблема расчета конструкций с разрывными параметрами остается недостаточно разработанной и пока не может быть эффективно решена с их помощью.

2. МПА более универсален, по сравнению с МКР, добавим к этому, что и проще, поскольку позволяет решать задачи, не прибегая к законтурным точкам, не сгущая расчетную сетку вблизи разрывов и особенностей. Сложнее сравнивать МПА с МКЭ, поскольку существует большое число модификаций этого метода, использующих конечные элементы различных форм и с различным числом степеней свободы. Сравнение разностной формы МПА с МКЭ при одинаковом порядке аппроксимирующих полиномов в пределах элемента говорит о большей точности МПА.

3. Развивающиеся в последнее время сплайн-методы в различных модификациях открывают широкие возможности для реализации новых подходов к расчету конструкций с разрывными параметрами. Так, метод последовательных аппроксимаций позволяет более эффективно по сравнению с МКЭ и МКР выполнять расчеты конструкций с разрывными параметрами. Однако ему присущи и определенные недостатки. Вывод основных расчетных зависимостей метода последовательных аппроксимаций слишком громоздок, несколько запутан и не исходит из общих положений численных методов.

4. Необходима разработка новых подходов к решению проблемы расчета конструкций с разрывными параметрами на основе сплайн-методов, к которым относится и МПА.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. М. : Физматгиз. Т. II. 1962. 640 с.
2. *Варвак П. М., Варвак Л. П.* Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М. : Стройиздат, 1977. 154 с.
3. *Смирнов А. Ф.* Устойчивость и колебание сооружений. М. : Трансжалдориздат, 1958. 572 с.
4. *Александров А. В.* Численное решение линейных дифференциальных уравнений при помощи матрицы дифференцирования // Строительная механика. 1961. Вып. 131. С. 253—266.
5. *Лащеников Б. Я.* Применение метода интегральной матрицы при разрывных и обобщенных функциях // Строительная механика. 1963. Вып. 174. С. 123—128.
6. *Габбасов Р. Ф.* О разностных формах метода последовательных аппроксимаций // Численные методы решения задач строительной механики. К. : КИСИ, 1978. С. 121—126.
7. *Смирнов В. А.* Расчет пластинки сложного очертания. М. : Стройиздат, 1978. 300 с.
8. *Борисов М. В., Вахитов М. Б.* О решении некоторых задач теории упругости с помощью интегрирующих матриц // Тр. КАИ. 1974. Вып. 166. С. 32—39.

1. *Berezin I. S., Zhidkov N. P.* Metody vychislenii. M. : Fizmatgiz. T. II. 1962. 640 s.
2. *Varvak P. M., Varvak L. P.* Metod setok v zadachakh rascheta stroitel'nykh konstruktsii. M. : Stroyizdat, 1977. 154 s.
3. *Smirnov A. F.* Ustoychivost' i kolebanie sooruzhenii. M. : Transzhaldorizdat, 1958. 572 s.
4. *Aleksandrov A. V.* Chislennoe reshenie lineynykh differentsial'nykh uravnenii pri pomoshchi matritsy differentsirovaniya // Stroitel'naya mekhanika. 1961. Vyp. 131. C. 253—266.
5. *Lashchenikov B. Ya.* Primenenie metoda integral'noi matritsy pri razryvnykh i obobshchennykh funktsiyakh // Stroitel'naya mekhanika. 1963. Vyp. 174. C. 123—128.
6. *Gabbasov R. F.* O raznostnykh formakh metoda posledovatel'nykh approksimatsii // Chislennye metody resheniya zadach stroitel'noi mekhaniki. K. : KISI, 1978. C. 121—126.
7. *Smirnov V. A.* Raschet plastinki slozhnogo ochertaniya. M. : Stroyizdat, 1978. 300 s.
8. *Borisov M. V., Vakhitov M. B.* O reshenii nekotorykh zadach teorii uprugosti s pomoshch'yu integriruyushchikh matrits // Tr. KAI. 1974. Vyp. 166. C. 32—39.

Поступила в редакцию
в мае 2014 г.

Ссылка для цитирования:

Катеринина С. Ю., Катеринина М. А. Исследование напряженно-деформированного состояния конструкций с разрывными параметрами с использованием различных методов строительной механики // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Строительная информатика. 2014. Вып. 11(32). Ст. 8. Режим доступа: http://www.vestnik.vgasu.ru/

For citation:

Katerinina S. Yu., Katerinina M. A. [Research of stress-strained state of constructions with discontinuous parameters with the use of different methods of structural mechanics]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2014, no. 11(32), paper 8. (In Russ.) Available at: http://www.vestnik.vgasu.ru/