

УДК 51-74

**Г. А. Джинчелашвили, А. В. Урожаев**

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОМОЩИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА**

Рассматриваются преимущества вейвлет-преобразования перед методом преобразования Фурье. Частотно-временная локализация цифровой акселерограммы землетрясения раскладывается на частотные составляющие. Полученные данные позволяют воспроизвести процесс сейсмического воздействия на сооружение с последующим расчетом перемещений и деформаций конструкций здания. Вейвлет-преобразование позволяет детально исследовать сигнал, внести необходимые изменения и произвести обратное преобразование.

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** вейвлет-преобразование, преобразование Фурье, землетрясение, частотно-временное разложение сигнала, базис вейвлет-преобразования.

The authors discuss the advantages of wavelet transformation if compare it with method of the Fourier transform. Time-frequency localization of the earthquake's digital accelerogram can be decomposed into frequency components. The obtained results allow reproduce the process of seismic impact on the construction with the following calculation of the displacement and deformation of the building structure. The wavelet transformation allows study the signal in all details, make necessary changes and make the invert conversion.

**К е у w o r d s:** wavelet transformation, Fourier transformation, earthquake, time-frequency signal decomposition, basis of the wavelet transformation.

**Преобразование Фурье.** Введем обозначение пространства квадратично интегрируемых функций, имеющих конечную энергию, через  $L^2(0, 2\pi)$ :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad t \in (0, 2\pi). \tag{1}$$

Функция  $f(t)$  может быть периодически расширена и определена на всей оси  $R(-\infty, \infty)$  так, что

$$f(t) = f(t - 2\pi), \quad t \in R.$$

Любую функцию  $f(t)$  из пространства  $2\pi$ -периодических квадратично интегрируемых функций можно разложить в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(int). \tag{2}$$

Коэффициенты  $c_n$  имеют вид

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int) dt,$$

и ряд (2) равномерно сходится к  $f(t)$ :

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{-M}^N c_n \exp(int) \right|^2 dt = 0.$$

Таким образом, каждая функция из пространства  $L^2(0, 2\pi)$  представляется в виде суперпозиции преобразований базовой функции

$$w(t) = \exp(it) = \cos t + i \sin t,$$

т. е. является результатом сложения синусоидальных волн с различными частотными характеристиками [1].

Ядро преобразования Фурье предельно локализовано в частотной области, что позволяет выделить информацию о периодичности функции. Однако ядро преобразования не локализовано во времени, поэтому преобразование Фурье является плохим методом изучения изменяющихся во времени функций.

Получения точных результатов анализа функции одновременно в двух областях (частотной и временной) можно добиться благодаря вейвлет-преобразованию.

**Вейвлет-преобразование.** Можно рассмотреть пространство  $L^2(R)$  функций  $f(t)$ , определенных на всей действительной оси  $R(-\infty, \infty)$  и обладающих конечной энергией (нормой):

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Функциональные пространства  $L^2(0, 2\pi)$  и  $L^2(R)$  имеют существенные различия. Например, среднее локальное значение любой функции из  $L^2(R)$  должно стремиться к нулю на  $+\infty$ . Волна, образуемая функцией синуса, не принадлежит пространству  $L^2(R)$ , поэтому семейство синусоидальных волн  $w_n$ , являющееся основой преобразования Фурье, не может быть базисом пространства  $L^2(R)$ .

В качестве базисных функций пространства  $L^2(R)$  можно выбрать вейвлеты — хорошо локализованные «всплески» (перевод слова «wavelet»), благодаря которым каждая частотная составляющая функции анализируется с той детальностью, которая соответствует ее масштабу.

По аналогии с пространством  $L^2(0, 2\pi)$ , которое полностью формировалось с помощью одной синусоидальной функции  $w(t)$ , функциональное пространство  $L^2(R)$  формируется также с помощью одной базисной функции — вейвлета  $\psi(t)$ .

Вводится аналог частоты преобразования Фурье, имеющий вид записи через степени двойки:

$$\psi(2^j t - k),$$

где  $j$  и  $k$  — целые числа.

Таким образом, с помощью дискретных изменений масштаба преобразований  $(1/2^j)$  и сдвигов  $(k/2^j)$  вдоль оси можно описать весь частотный спектр и покрыть всю ось, имея единственный базисный вейвлет  $\psi(t)$ . Аналогом масштаба в преобразовании Фурье является период гармонического колебания, а для сдвига аналогов нет.

Из определения нормы

$$p_2 = p, p^{1/2}, \quad p, q = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q^*(t)dt$$

следует, что

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in I \quad (3)$$

также нормированы на единицу.

Вейвлет  $\psi \in L^2(R)$  называется ортогональным, если семейство  $\{\psi_{jk}\}$  является ортонормированным базисом функционального пространства  $L^2(R)$ , т. е.  $\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$  и любая функция  $f \in L^2(R)$  представляется в виде ряда [2]

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (4)$$

равномерная сходимость которого в  $L^2(R)$  означает, что

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{-M_2}^{N_2} \sum_{-M_1}^{N_1} c_{jk} \psi_{jk2} \right\| = 0.$$

Базис пространства  $L^2(R)$  строится благодаря непрерывным масштабным преобразованиям и переносам базисного вейвлета  $\psi(t)$  с произвольными значениями параметров — коэффициента масштаба  $a$  и параметра сдвига  $b$ :

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \quad \psi \in L^2(R). \quad (5)$$

На основе его запишем интегральное вейвлет-преобразование:

$$[W_{\psi} f](a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}^*(t) dt,$$

где  $[W_{\psi} f](a, b)$  — коэффициенты (амплитуды) вейвлет-преобразования.

Коэффициенты  $c_{jk} = \langle \psi_{jk}, f \rangle$  разложения (4) выбранной функции  $f$  пространства  $L^2(R)$  в ряд по базисным вейвлетам определяются через интегральное вейвлет-преобразование:

$$c_{jk} = [W_{\psi} f]\left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right). \quad (6)$$

Таким образом, каждая функция из пространства  $L^2(R)$  является суперпозицией преобразований по масштабу и сдвигу базисного вейвлета [3].

Для того чтобы выбранная функция была вейвлетом, необходимо выполнение следующих условий:

1. Ограниченность нормы:  $\|\psi^2\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$ .

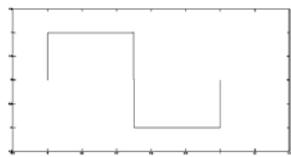
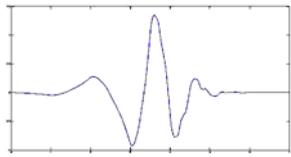
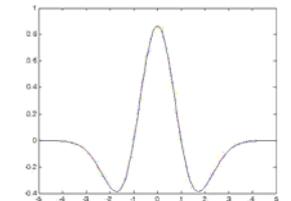
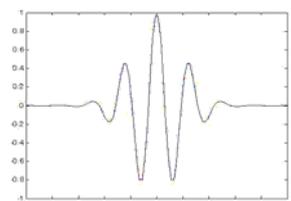
2. Вейвлет-функция должна быть ограничена и по времени, и по частоте:  $|\psi(t)| \leq c(1+|t|)^{-1-e}$  и  $|f_\psi(\omega)| \leq c(1+|\omega|)^{-1-e}$  при  $e > 0$ .

3. Хотя бы первый момент  $\mu_0 = \int \psi(t)dt = 0$  должен быть равен нулю.

Синусоидальная волна формирует ортонормированный базис функционального пространства  $L^2(0, 2\pi)$ , и с обратным преобразованием Фурье проблем не возникает, однако в зависимости от вида исходной функции в разной степени наблюдается эффект Гиббса. Чем больше число гармоник, используемых при Фурье-анализе сигнала, тем ближе будет форма сигнала, получаемого при обратном преобразовании, но во всех случаях заметен эффект Гиббса, при этом особенно четко на участках резких скачков исследуемой функции.

Следует подробнее остановиться на рассмотрении некоторых вейвлетов. Сравнительные результаты представлены в табл.

Основные вейвлеты

Название	Функция $\psi(t)$	Ортогональный	График
Хаара	$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0,5, \\ -1, & 0,5 \leq x < 1, \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases}$	Да	
Добеши	Семейство: $\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2t - k)$	Да	
Шляпа	$\psi(x) = ce^{\left(\frac{-x^2}{2}\right)}(1-x^2),$ $c = 2 / (\sqrt{3}\pi^{1/4})$	Нет	
Морле	$\psi(x) = e^{\left(\frac{-x^2}{2}\right)} \cos(5x)$	Нет	

Вейвлет является базисной функцией в пространстве  $L^2(R)$  только тогда, когда построенный на его основе базис ортонормирован и обратное преобразование в пространстве  $L^2(R)$  существует.

Для ортонормированных вейвлетов обратное преобразование записывается с помощью аналогичного базиса:

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \iint [W_{\psi} f](a, b) \psi_{ab}(t) \frac{dad b}{a^2}, \quad (7)$$

где  $C_{\psi}$  — нормализующий коэффициент:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\psi}(\omega) \right|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty. \quad (8)$$

**Частотно-временная локализация.** Преобразование Фурье является прекрасным математическим аппаратом анализа физических сигналов. Однако такой математический метод не всегда может достаточно эффективно проанализировать исходную функцию.

Частота любого сигнала обратно пропорциональна его длительности. Поэтому высокочастотную информацию с достаточной точностью необходимо извлекать из относительно малых временных промежутков, и наоборот: низкочастотная информация точнее извлекается из относительно широких временных интервалов.

В отличие от преобразования Фурье базисом вейвлет-преобразования является функция, быстро стремящаяся к нулю вне небольшого интервала. Такая возможность появляется благодаря подвижному частотно-временному окну вейвлет-преобразования, сдвигающегося по времени и растягивающегося по масштабу.

Между гармониками Фурье и масштабом вейвлета существует взаимосвязь — обратная пропорциональность собственной частоты и масштаба, взвешенная некоторым коэффициентом пересчета  $\omega = \frac{k}{a}$ , где  $\omega$  — собственная частота,  $a$  — масштаб. Коэффициент пересчета  $k$  либо рассчитывается простым наложением гармоники известной частоты на вейвлет-спектр этой гармоники, либо выбирается из таблицы коэффициентов пропорциональности. Так, например, для вейвлета «мексиканская шляпа»  $k = \sqrt{\frac{5}{2}}$ , для wave-функции  $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$  [4].

**Компьютерные расчеты.** Численные расчеты производились в программном комплексе MathWorks Matlab. Для каждого из сигналов будет выполнена следующая последовательность расчета:

- 1) преобразование Фурье;
- 2) вейвлет-преобразование с помощью двух различных вейвлетов;
- 3) получение частотно-временной локализации.

Следующий сигнал будет ярко отражать преимущества вейвлет-преобразования перед преобразованием Фурье. Сигнал состоит из последовательно действующих синусоид с амплитудами 10 и 15 Гц:  $f(t) = \sin((15 \cdot 2\pi t)(t < 5)) + \sin((10 \cdot 2\pi t)(t > 5))$ .

Преобразование Фурье сигнала представлено на рис. 1.

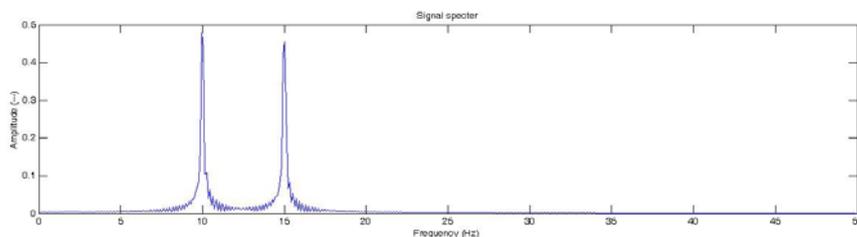


Рис. 1. Преобразование Фурье рассматриваемого сигнала

Благодаря вейвлет-преобразованию можно четко выделить временные рамки действия той или иной частотной составляющей в сигнале (рис. 2).

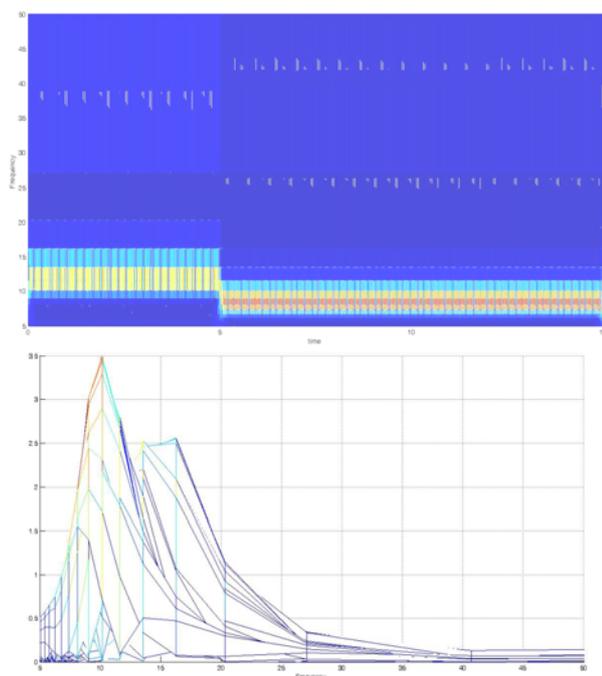


Рис. 2. Вейвлет-преобразование рассматриваемого сигнала, вейвлет Морле

В качестве практического применения была рассмотрена цифровая акселерограмма землетрясения в Спитаке (Армения, 1988 г.) (рис. 3, 4).

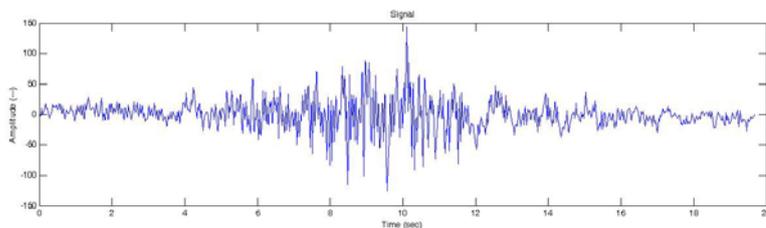


Рис. 3. Цифровая акселерограмма землетрясения в Спитаке, 1988 г.

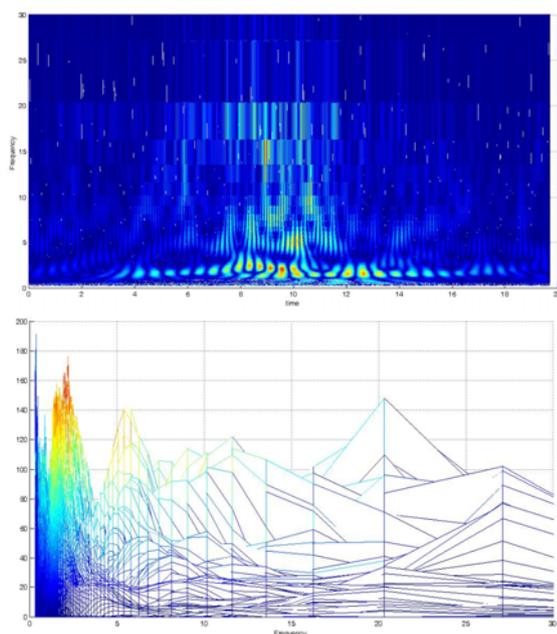


Рис. 4. Вейвлет-преобразование акселерограммы землетрясения, вейвлет Морле

**Выводы.** По результатам проведенных практических расчетов становится очевидным преимущество вейвлет-анализа перед анализом Фурье. При раскладывании сигнала по вейвлетам получается частотно-временная картина, представляющая частотные компоненты сигнала в любой момент времени.

Вейвлет-преобразование сигнала позволяет вносить изменения в частотные составляющие массива данных, редактировать их временное разрешение и затем производить обратное восстановление сигнала. Для обработки разложенного массива данных используются вейвлет-фильтры.

Физический смысл вейвлет-коэффициентов представляет собой взаимную энергию исследуемого сигнала и базисного вейвлета. Энергия равна сумме квадратов значений коэффициентов, поэтому те масштабы, на которых коэффициенты имеют большое абсолютное значение, будут соответствовать более высоким значениям энергии. Квадрат вейвлет-коэффициента характеризует, сколько энергии сигнала приходится на выделенный отрезок частот в определенный момент времени.

Благодаря гибкости вейвлетов становится возможным отслеживать тонкости сигнала, точки перелома и другие трудности, которые тяжело уловить с помощью преобразования Фурье.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ. Основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. № 166(11).
2. Витязев В. В. Вейвлет-анализ временных рядов. СПб. : СПбГУ, 2001.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
4. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М. : ДМК Пресс, 2005.

1. *Astaf'eva N. M.* Veyvlet-analiz. Osnovy teorii i primery primeneniya // Uspekhi fizicheskikh nauk. 1996. № 166(11).
2. *Vityazev V. V.* Veyvlet-analiz vremennykh ryadov. SPb. : SPbGU, 2001.
3. *Dobeshi I.* Desyat' lektsiy po veyvletam. Izhevsk : NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2001.
4. *Smolentsev N. K.* Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MATLAB. M. : DMK Press, 2005.

© Джинчвелашвили Г. А., Урожаев А. В., 2013

*Поступила в редакцию  
в декабре 2013 г.*

*Ссылка для цитирования:*

*Джинчвелашвили Г. А., Урожаев А. В.* Исследование нестационарных динамических процессов при помощи вейвлет-анализа // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2013. Вып. 4(29). URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/DzhinchvelashviliUrozhayev-2013\\_4\(29\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/DzhinchvelashviliUrozhayev-2013_4(29).pdf)