

УДК 624.131

А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, А. И. Вайнгольц, В. В. Подтелков

**РАЗВИТИЕ ОБЛАСТЕЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ОДНОРОДНОМ
ОСНОВАНИИ ГИБКОГО ЛЕНТОЧНОГО ФУНДАМЕНТА В РАМКАХ МОДЕЛИ
СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ГРУНТА**

Приведены примеры процесса образования и развития областей пластических деформаций в однородном основании заглубленного гибкого ленточного фундамента при его нагружении в рамках модели смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта. Приведено сопоставление полученных результатов с результатами, получаемыми тривиальным способом — при выполнении условия пластичности Кулона, и с результатами экспериментально-теоретических исследований, выполненных независимо от нас другими авторами.

К л ю ч е в ы е с л о в а: заглубленный фундамент, однородное основание, равномерно распределенная нагрузка, условие пластичности Кулона, модель смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта, области пластических деформаций.

In the article examples of formation and development of the plastic deformation in a homogeneous basis of the buried flexible strip foundation under loading within the model of mixed problem of the elasticity theory and soil plasticity theory are given. The comparison of the obtained results with those obtained by the trivial test — under the condition of Coulomb plasticity, and with the results of the experimental and theoretical studies carried out independently by other authors is provided.

К e y w o r d s: buried foundation, homogeneous basis, evenly distributed load, condition of Coulomb plasticity, model of mixed problem of the elasticity theory and soil plasticity theory, plastic deformations area.

Известно, что приложение к грунтовому основанию даже небольшой по интенсивности нагрузки приводит к образованию под ее краями областей локальных сдвигов или областей пластических деформаций.

Обычно форма и размеры этих областей отыскиваются путем подстановки численных значений напряжений в точках грунтового массива, найденных из классических решений задач теории упругости, в условие пластичности Кулона [1], которое записывается в виде

$$\sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_{св}) \sin \varphi,$$

или

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = (\sigma_x + \sigma_z + 2\sigma_{св})^2 \sin^2 \varphi, \quad (1)$$

или

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} = \operatorname{tg} \varphi,$$

где σ_1 и σ_2 — главные нормальные напряжения в рассматриваемой точке; σ_x , σ_z и τ_{xz} — компоненты полного напряжения в той же точке; $\sigma_{св} = C \operatorname{ctg} \varphi$ — давление связности; C , φ и $\theta_{\max}$ — удельное сцепление, угол внутреннего трения грунта и угол максимального отклонения соответственно.

Области, охватываемые кривыми, проходящими через точки, в которых выполняются условия (1), считаются областями пластических деформаций (ОПД).

Однако построенные таким образом ОПД не являются истинными. Причина заключается в том, что в точках, расположенных внутри ОПД, напряжения не могут отыскиваться методами теории упругости, так как здесь они не только являются функциями главного вектора нагрузок, но и зависят от физико-механических свойств грунтового массива. Поэтому истинные области пластических деформаций имеют другую форму и другой размер.

Уточнить геометрические параметры областей пластических деформаций можно, если решать задачу об определении ОПД в смешанной постановке.

Физическая модель смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта подразумевает следующее:

1. Между упругими и пластическими областями имеется четкая граница. В процессе нагружения основания грунт, находящийся в упругих областях, подчиняется законам линейной теории упругости, а в пластических — законам теории пластичности; и в упругих, и в пластических областях выполняются уравнения равновесия.

2. В каждой точке границы выполняется условие непрерывности поля напряжений: нормальные и касательные к границе напряжения должны быть одинаковыми по обеим ее сторонам.

3. В областях линейной деформируемости выполняется условие совместности деформаций, а внутри пластических областей — условие пластичности.

Аналитическое решение задачи связано с разрешением системы дифференциальных уравнений равновесия, уравнения неразрывности деформаций и условия пластичности, которые для плоской задачи записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_z) = -\frac{1}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \quad (3)$$

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = (\sigma_x + \sigma_z + 2\sigma_{cb})^2 \sin^2 \varphi, \quad (4)$$

где X, Z — проекции суммарного (включая собственный вес грунта) вектора нагрузок на соответствующие оси координат; ∇^2 — оператор Лапласа; μ — коэффициент грунта Пуассона.

В работе [2] приведено приближенное аналитическое решение смешанной задачи, согласно которому границы между упругими и пластическими областями определяются на основе соотношений

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(\tau_{zx} + \tau'_{zx})}{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma'_x}; \quad (5)$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{l(\sigma_z(3 + \cos 2\theta) + \sigma_x(1 - \cos 2\theta) + 2\tau_{zx} \sin 2\theta)}{-(\sigma_z + \sigma_x) + 2\sigma_{cb} + \cos 2\theta(\sigma_x - 3\sigma_z - 2\sigma_{cb}) - 2\sin 2\theta(\tau_{zx} + b(\sigma_z + \sigma_{cb}))}, \quad (6)$$

а напряжения в точках пластической области (помечены штрихом) вычисляются по формулам [2, 3]

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_z &= \sigma_z, \\ \sigma'_x &= \frac{\sigma_z(l - \sin \varphi) - 2\sigma_{cb} \sin \varphi}{l + \sin \varphi}, \\ \tau'_{xz} &= \frac{(\sigma_z + \sigma_{cb})b \sin \varphi}{l + \sin \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $b = \operatorname{tg} 2\alpha^* = \operatorname{tg} 2[\alpha - (45^\circ + \varphi / 2)]$; $l = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}$; σ_z , σ_x и τ_{xz} — компоненты напряжения в рассматриваемой точке, вычисленные при решении соответствующей задачи теории упругости; α — угол наклона наиболее вероятной площадки сдвига, определяемый из условия минимальности коэффициента остаточного сопротивления сдвигу f [2].

На рис. 1 (показана половина расчетной схемы) изображены области пластических деформаций в грунтовом массиве из суглинка, вмещающем выемку прямоугольного сечения при величине отношения ее ширины к глубине $2b / H = 2$ ($H = 2$ м), построенные на основании смешенного решения [2] (рис. 1, а) и тривиальным способом при помощи формул (1) (рис. 1, б). При этом грунт имеет следующие характеристики: удельное сцепление $C = 16$ кПа; угол внутреннего трения $\varphi = 16^\circ$; удельный вес $1,96$ т/м³. Величина коэффициента бокового давления грунта принята равной $\xi_0 = 0,75$.

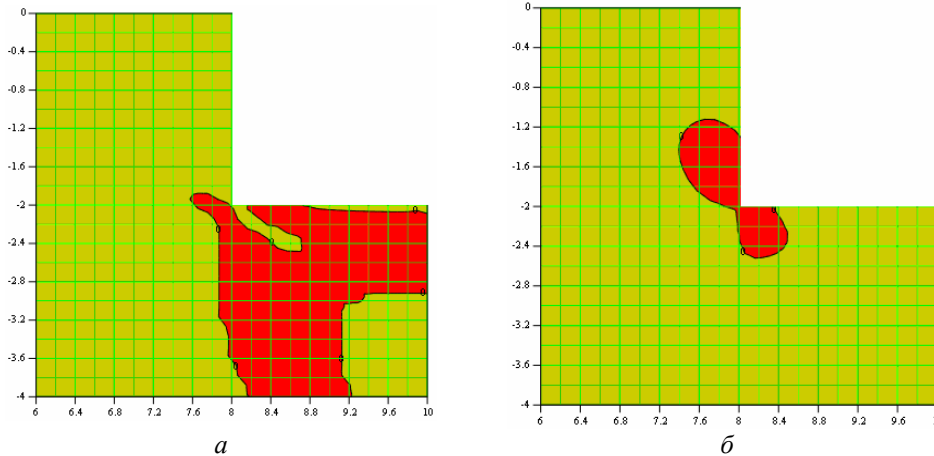


Рис. 1. Области пластических деформаций в грунтовом массиве из суглинка, вмещающем выемку прямоугольного сечения при $2b / H = 2$, построенные: а — на основании смешанного решения [2]; б — тривиальным способом при помощи формул (1)

Из рис. 1 видно, что ОПД, которые везде закрашены красным цветом, построенные на основе смешанного решения, гораздо больше, чем области, построенные тривиальным способом.

После постепенного увеличения нагрузки на основание начинается процесс эволюции ОПД: области, построенные на основе смешанного решения,

быстро уменьшаются в размерах, почти исчезают (при $2,1\gamma H < q < 2,4\gamma H$), а затем вновь начинают свое развитие, но уже в противоположную от фундамента сторону (влево).

Области пластических деформаций, построенные на основе выполнения на их границах условия пластичности, сначала исчезают (при $q \approx 1\gamma H$), а затем вновь получают развитие вверх в борт выемки и вниз под фундамент. При $q > 7\gamma H$ происходит катастрофическое увеличение их размеров, сопровождающееся выходом на дневную поверхность и смыканием под фундаментом (рис. 2, 3). Последнее обстоятельство отмечалось нами ранее в работах [4—5].

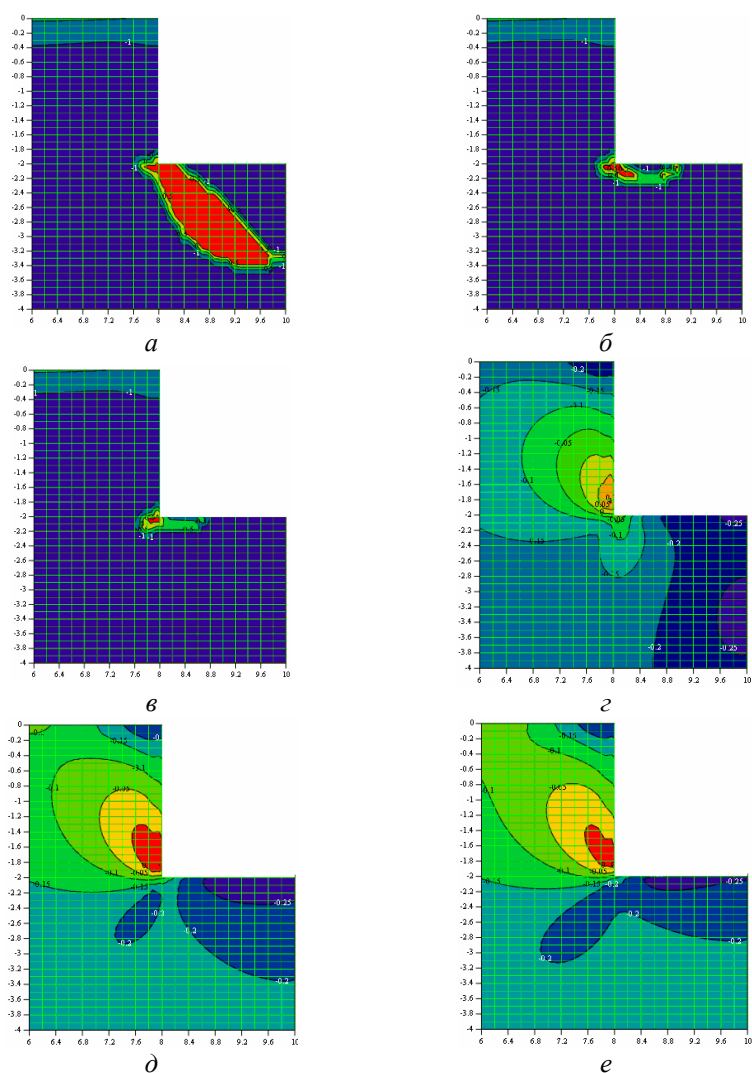


Рис. 2. Этапы эволюции областей пластических деформаций в основании заглубленного фундамента при $2b/h = 2$ и величине интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q/\gamma H = 1,0; 2,0; 2,1$, построенные на основе: а, б, в — решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта [2]; г, д, е — условия пластичности

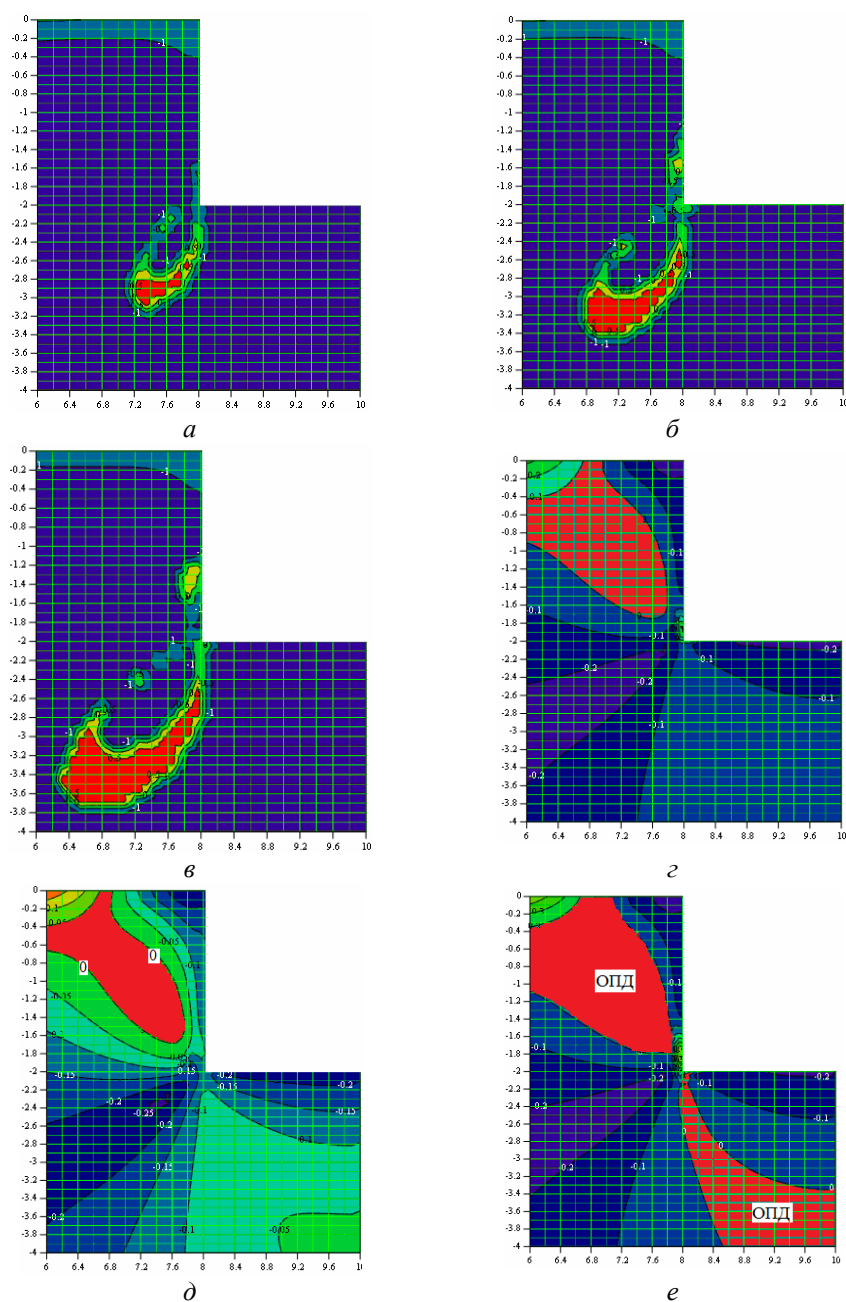


Рис. 3. Этапы эволюции областей пластических деформаций в основании заглубленного фундамента при $2b/h = 2$ и величине интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q/\gamma H = 6,0; 7,0; 8,0$, построенные на основе: *a*, *б*, *в* — решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта [2]; *г*, *д*, *е* — условия пластичности

Абсолютно аналогичная картина наблюдается на рис. 4—6, где приведены этапы эволюции областей пластических деформаций в основании фундамента, сложенного тем же грунтом, но при $2b/h = 0,5$.

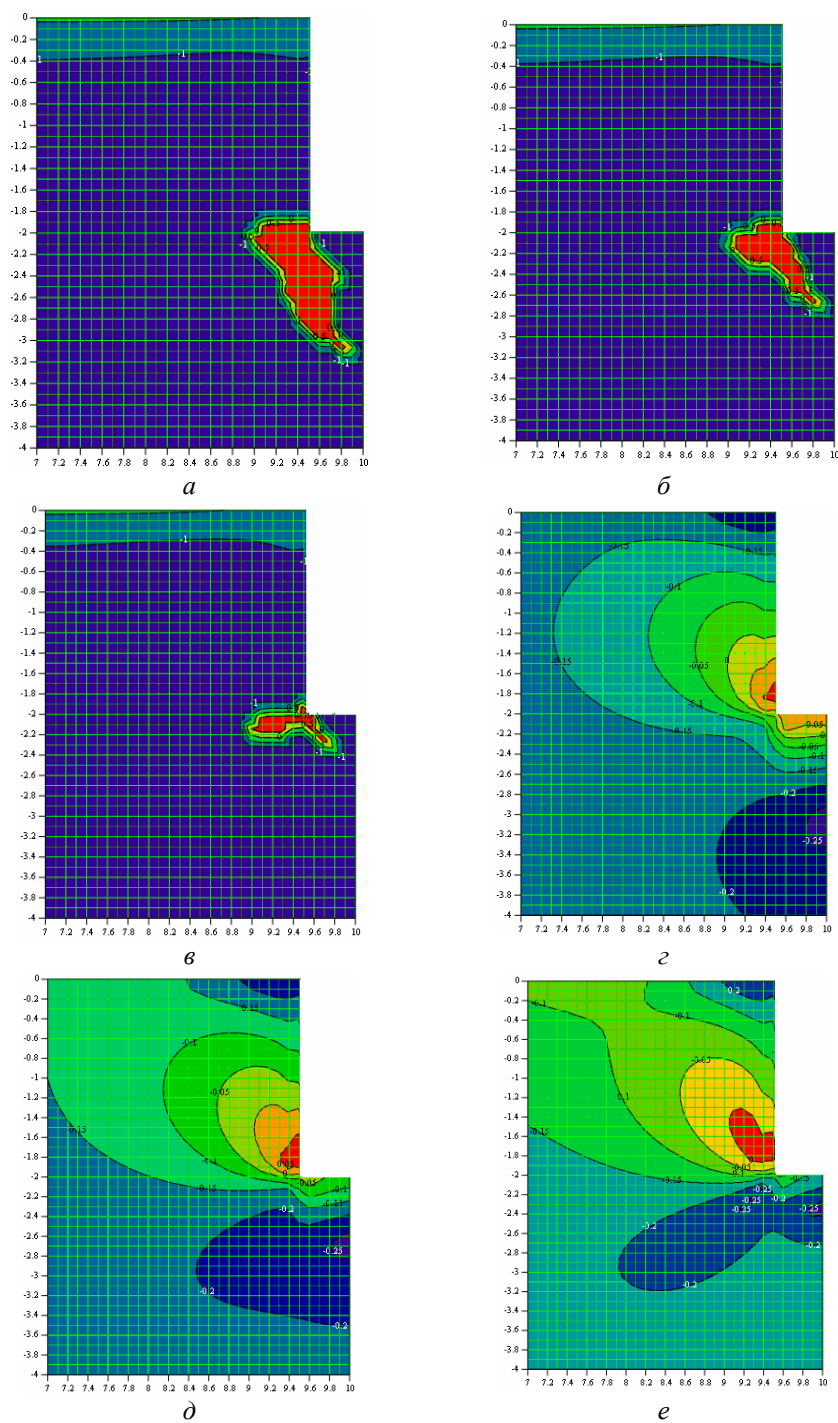


Рис. 4. Этапы эволюции областей пластических деформаций в основании заглубленного фундамента при $2b/h = 0,5$ и величине интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q/\gamma H = 0; 1,0; 2,0$, построенные на основе: *а, б, в* — решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта [2]; *д, е* — условия пластичности

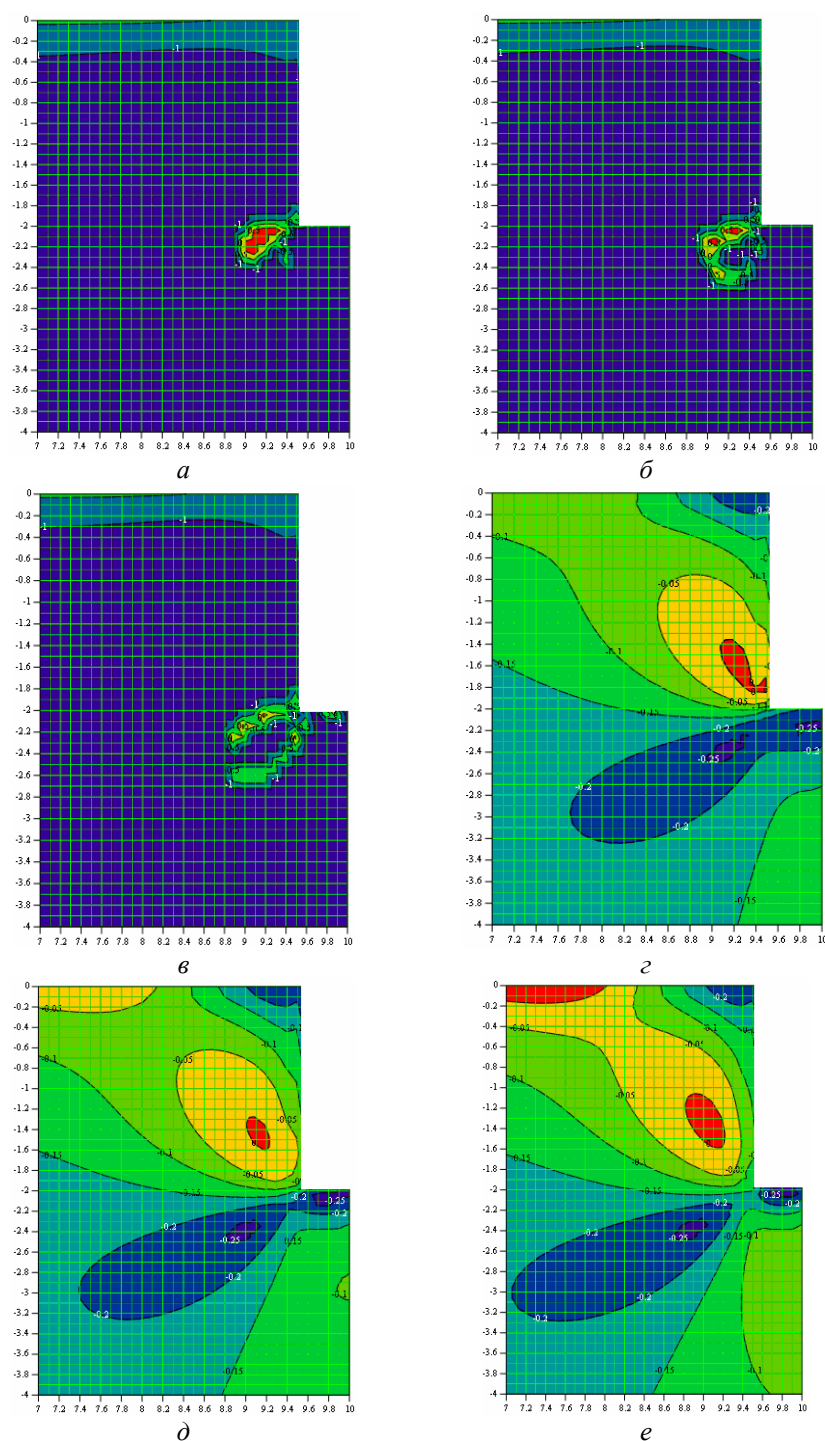


Рис. 5. Этапы эволюции областей пластических деформаций в основании заглубленного фундамента при $2b/h = 0,5$ и величине интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q / \gamma H = 3,0; 4,0; 5,0$, построенные на основе: а, б, в — решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта [2]; г, д, е — условия пластичности

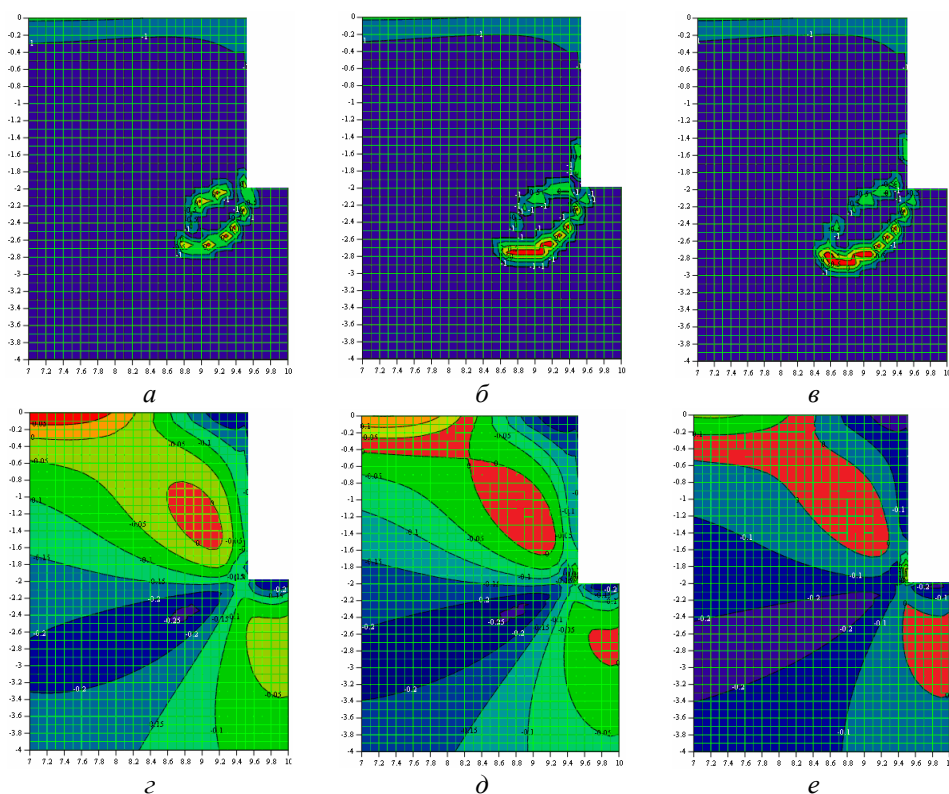


Рис. 6. Этапы эволюции областей пластических деформаций в основании заглубленного фундамента при $2b/h = 0,5$ и величине интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q/\gamma H = 7,0; 7,0; 8,0$, построенные на основе: *а, б, в* — решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта [2]; *г, д, е* — условия пластичности

На наш взгляд, требует объяснения факт возникновения достаточно больших ОПД в основании при отсутствии нагрузки, при условии построения этих областей на основе смешанного решения. Это может быть обусловлено следующим: после устройства котлована происходит поднятие его дна, величина которого зависит от геометрических размеров выемки, прочностных и деформационных свойств грунта. Очевидно, что при всех прочих равных условиях величина подъема дна котлована тем больше, чем больше его ширина и глубина. Сравнивая изображения ОПД, приведенные на рис. 2, *а* и 4, *а*, видим, что в последнем случае размеры пластических областей значительно меньше при меньшей ширине котлована.

Возникающие при откопке котлована в верхних слоях его дна вертикальные растягивающие напряжения и трансформация полей горизонтальных и касательных компонент напряжения могут привести к разуплотнению грунта в областях, примыкающих к дну котлована, что и может объяснить наблюдаемую картину.

Отметим, что все вычисления и графические построения выполнены при помощи компьютерной программы [6], разработанной в ВолгГАСУ.

Сравним теперь полученные нами результаты с результатами экспериментально-аналитических исследований, проведенных другими авторами.

В работе [7] приведены результаты экспериментального определения областей пластических деформаций в основании квадратного штампа. В основу эксперимента положена методика определения границ зон предельного состояния грунта, которая излагается в работе [8]. При этом в качестве параметра упрочнения модели грунта принята интенсивность деформаций сдвига ε_i , которая позволяет однозначно сравнивать деформированное состояние в различных точках среды по величине деформации формы. С помощью параметра $\eta = \varepsilon_i^0 / \varepsilon_i^j$, где ε_i^0 — интенсивность сдвиговых деформаций грунта в основании, а ε_i^j — интенсивность деформаций сдвига при пиковой прочности грунта, производится оценка напряженного состояния грунта. В областях основания, где $\eta < 1$, грунт находится в допредельном состоянии, а в зонах, где $\eta \geq 1$, он переходит в предельное состояние с дальнейшим разупрочнением [7].

На рис. 7—8 приведены изолинии параметра η . Не давая пока количественной оценки сопоставляемых результатов, можно сказать, что границы областей пластических деформаций, приводимые в работе [7], и полученные нами (см. рис. 2—6), весьма близки и по своей форме, и по направлению развития.

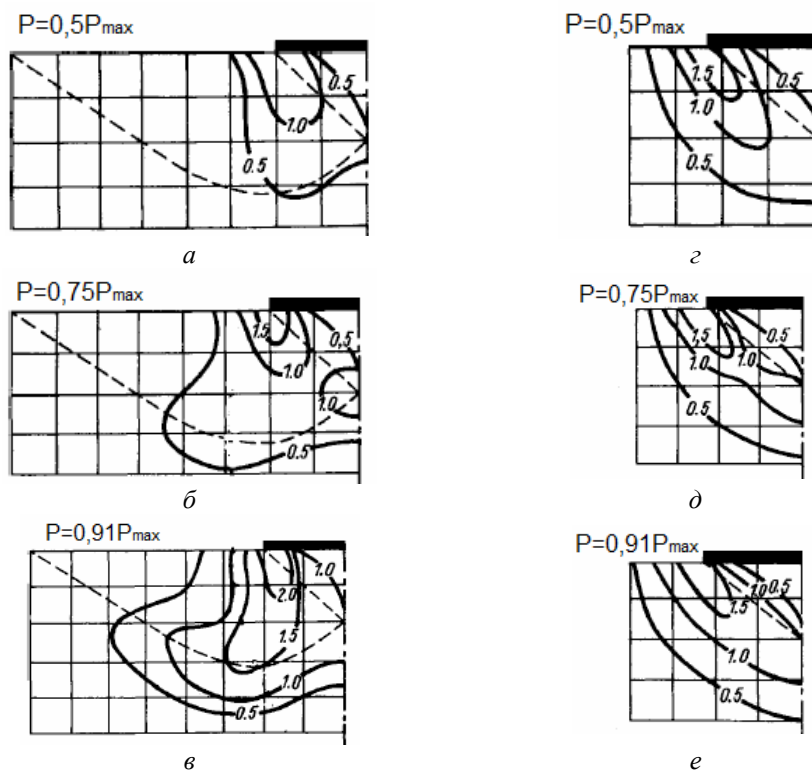


Рис. 7. Изолинии параметра η в основании квадратного штампа: а, б, в — для плоскости симметрии, проходящей через середины противоположных сторон; г, д, е — для диагональной плоскости симметрии [7]

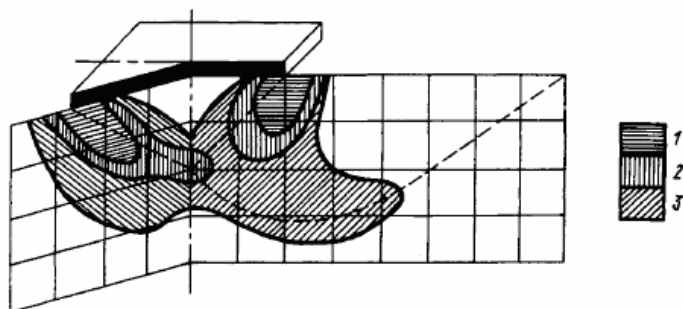


Рис. 8. Изолинии параметра $\eta = 1$ в основании квадратного штампа: 1 — при $P = 0,5P_{\max}$; 2 — $P = 0,75P_{\max}$; 3 — $P = 0,91P_{\max}$ [7]

В работе [9] приведены результаты экспериментальных исследований процесса деформирования песчаного основания. Для изучения количественной и качественной сторон этого процесса использовались методы фотограмметрии и фотофиксации траекторий перемещения частиц грунта [10].

На рис. 9 приведены результаты измерения полей деформаций в песчаном основании в условиях плоской деформации, опубликованные в работе [9], в виде изолиний деформаций сдвига. Из рис. 9 видно, что деформации сдвига зарождаются в углах штампа и распространяются вниз и в сторону. Пошаговое нагружение основания приводит к прогрессирующему развитию полосы сдвига, край которой смещается вправо из-под штампа в направлении к свободной поверхности основания.

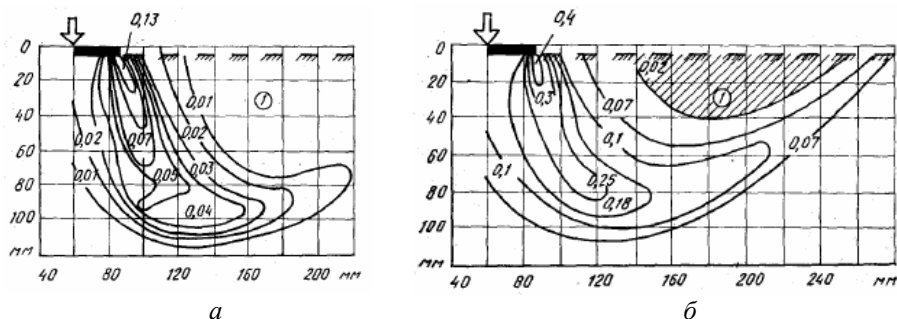


Рис. 9. Изолинии деформаций сдвига при осадке штампа, соответствующей: а — моменту до наступления предельной нагрузки; б — предельной по устойчивости нагрузке [9]

Проводя, как и в первом случае, только качественное сравнение изображений областей пластических деформаций, приведенных на рис. 9, и полученных нами (см. рис. 2—6), можно констатировать практическую идентичность их формы, положения и направления развития.

Выводы:

1. Приведенное в работе [2] приближенное аналитическое решение смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунтов позволяет предположительно говорить о существовании новых особенностей процесса образования и развития областей пластических деформаций, которые заклю-

чаются в том, что зарождение последних происходит непосредственно в основании котлована, что может быть объяснено разуплотнением верхних слоев грунта. Затем, по мере загрузки основания, происходит изменение размеров и формы ОПД и переориентация направления их развития.

2. Нижние границы областей пластических деформаций очень похожи на очертание линий скольжения, полученных В. В. Соколовским [10] при аналитическом решении соответствующей задачи теории предельного равновесия.

3. Положение, форма, направление развития областей пластических деформаций, приведенных в настоящей работе, качественно совпадают с соответствующими параметрами ОПД, полученными независимо от нас другими авторами при проведении экспериментальных исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Coulomb C.* Application des règles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture // Memoires de savants etrangers de L'Academie des sciences de Paris. Paris, 1773.
2. *Богомолов А. Н.* Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке. Пермь : ПГТУ, 1996. 150 с.
3. *Цветков В. К.* Расчет устойчивости однородных откосов при упругопластическом распределении напряжений в массиве горных пород // Изв. вузов. Горный журнал. 1981. № 5. С. 45—52.
4. *Богомолов А. Н., Никитин И. И.* Исследование динамики развития областей пластических деформаций в основании заглубленного фундамента // Вестн. ВолгГАСУ. Сер.: Технические науки. Вып. 2/3(8). С. 32—35.
5. Некоторые новые характеристики процесса развития областей пластических деформаций в однородном связном основании заглубленного фундамента / А. Н. Богомолов, А. А. Богомолов, М. Ю. Нестратов, С. И. Шиян, А. В. Соловьев // Вестн. ВолгГАСУ. Сер.: Строво и арх. 2008. Вып. 9(28). С. 12—16.
6. Устойчивость (Напряженно-деформированное состояние) : свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2009613499 / А. Н. Богомолов и др. № 2009612297 ; заявл. 19.05.2009 ; зарег. 30.06.2009.
7. *Саенков А. С., Елизаров С. А., Малышев М. В.* Развитие областей предельного состояния грунта в основании квадратного штампа // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1991. № 2. С. 15—17.
8. Разрушение песчаного грунта в основании при нагружении полосовым штампом / В. С. Копейкин, В. М. Демкин, А. С. Саенков, С. А. Елизаров // Межвузов. сб. Новочеркасск. 1986. С. 121—125.
9. *Болдырев Г. Г., Никитин Е. В.* Деформации песка в основании полосового штампа // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1987. № 1. С. 26—28.
10. *Соколовский В. В.* Статика сыпучей среды. М. : Гостехиздат, 1954. 275 с.

1. *Coulomb C.* Application des règles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture // Memoires de savants etrangers de L'Academie des sciences de Paris. Paris, 1773.
2. *Bogomolov A. N.* Raschet nesushchey sposobnosti osnovaniy sooruzheniy i ustoychivosti gruntovykh massivov v uprugoplasticheskoy postanovke. Perm' : PGU, 1996. 150 c.
3. *Tsvetkov V. K.* Raschet ustoychivosti odnorodnykh otkosov pri uprugoplasticheskom raspredelenii napryazheniy v massive gornykh porod // Izv. vuzov. Gornyy zhurnal. 1981. № 5. S. 45—52.
4. *Bogomolov A. N., Nikitin I. I.* Issledovanie dinamiki razvitiya oblastey plasticheskikh deformatsiy v osnovanii zaglublennogo fundamenta // Vestn. VolgGASU. Ser.: Tekhnicheskie nauki. Vyp. 2/3(8). S. 32—35.
5. Nekotorye novye kharakteristiki protsessa razvitiya oblastey plasticheskikh deformatsiy v odnorodnom svyaznom osnovanii zaglublennogo fundamenta / A. N. Bogomolov, A. A. Bogomolov, M. Yu. Nestratov, S. I. Shiyany, A. V. Solov'ev // Vestn. VolgGASU. Ser.: Str-vo i arkh. 2008. Vyp. 9(28). S. 12—16.

6. Ustoychivost' (Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie) : svidetel'stvo o gos. registratsii programm dlya EVM № 2009613499 / A. N. Bogomolov i dr. № 2009612297 ; zayavl. 19.05.2009 ; zareg. 30.06.2009.
7. Saenkov A. S., Elizarov S. A., Malyshev M. V. Razvitie oblastey predel'nogo sostoyaniya grunta v osnovanii kvadratnogo shtampa // Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov. 1991. № 2. S. 15—17.
8. Razrushenie peschanogo grunta v osnovanii pri nagruzhении polosovym shtampom / V. S. Kopeykin, V. M. Demkin, A. S. Saenkov, S. A. Elizarov // Mezhdvuzov. sb. Novocherkassk. 1986. S. 121—125.
9. Boldyrev G. G., Nikitin E. V. Deformatsii peska v osnovanii polosovogo shtampa // Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov. 1987. № 1. S. 26—28.
10. Sokolovskiy V. V. Statika sypuchey sredy. M. : Gostekhizdat, 1954. 275 s.

© Богомолов А. Н., Богомолова О. А., Вайнгольц А. И., Подтелков В. В., 2013

Поступила в редакцию
в сентябре 2013 г.

Ссылка для цитирования:

Развитие областей пластических деформаций в однородном основании гибкого ленточного фундамента в рамках модели смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, А. И. Вайнгольц, В. В. Подтелков // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2013. Вып. 2(27). URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/BogomolovBogomolovaVaingoltsPodtelkov-2013_2\(27\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/BogomolovBogomolovaVaingoltsPodtelkov-2013_2(27).pdf)