

УДК 624.074

**Г. И. Беликов, С. И. Евтушенко**

## **УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ СЕТЧАТЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА БАЗЕ КОНТИНУАЛЬНОЙ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ**

Построена теория пологих сетчатых цилиндрических оболочек на базе континуальной модели. Получена система уравнений, позволяющая исследовать напряженно-деформированное состояние оболочки аналитическим методом.

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** сетчатая полая оболочка, континуальная расчетная модель.

The theory of grid shallow cylindrical shells on the basis of a continual model is developed. The system of the equations, allowing investigate strain-stress state of a shell with the help of the analytical method is received.

**Key words:** grid shallow shell, continual calculation model.

В работе исследуются сетчатые пологие оболочки, которые занимают промежуточное положение между безмоментными оболочками и оболочками, в которых возникают изгибные напряжения. Рассматриваются гипотезы теории сетчатых пологих оболочек, которые позволяют существенно упростить исходную систему уравнений и получить аналитические решения, важные для практических приложений. Уравнения теории сетчатых пологих оболочек применяются для решения задач, связанных с расчетом напряженно-деформированного состояния в цилиндрических, конических и сферических оболочках.

Сетчатые пологие оболочки широко используются в строительстве, авиастроении, машиностроении, судостроении и т. п. Стрела подъема  $f$  оболочек не превышает одной пятой наименьшего размера плана  $l = \min(a, b)$ , т. е.  $f < 0,2l$ .

Теория сетчатых пологих цилиндрических оболочек построена на базе уравнений пологих оболочек, для которых справедливы гипотезы Лява — Кирхгофа. Дополнительно примем следующие гипотезы:

1. Геометрия срединной поверхности оболочки такая же, как и геометрия плоскости. В этом случае выражение для квадрата элементарной длины дуги на поверхности полой оболочкой можно записать так:  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .

2. В уравнениях равновесия можно пренебречь моментными членами, содержащими в качестве коэффициентов слагаемые с радиусами кривизны или их производными.

3. В выражениях для определения  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\tau$  можно пренебречь слагаемыми, содержащие перемещения  $u$  и  $v$ .

При рассмотрении расчетной континуальной модели [1] используются три группы уравнений. Статические и геометрические уравнения совпадают с соответствующими уравнениями теории упругих тонких сплошных оболочек. Уравнения состояния (упругости) зависят от структуры сетки и ее материала. Точность решения задач зависит от плотности сетки и характера внешних воздействий. Область применимости такой расчетной модели достаточно широка [1, 2].

Используя принятые гипотезы теории пологих оболочек, а также полагая, что на оболочку действует только давление  $Z = q_n$ , перепишем исходные статические и геометрические уравнения, а уравнения состояния получим на базе континуальной расчетной схемы [1].

Внутренние усилия и моменты будем считать равномерно распределенными по всему сечению модели.

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} - \frac{N_2}{R} + q_n = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\partial M_2}{\partial y} = Q_2; \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial y} - \frac{\partial M_1}{\partial x} = Q_1. \quad (5)$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R} + \frac{dv}{dy}; \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Третью группу уравнений упругости получим исходя из континуальной расчетной схемы. При этом жесткость стержней на кручение учитывать не будем ( $J_{3i} = 0$ ).

Для принятой модели сетчатой полой оболочки, состоящей из  $n$  семейства стержней, формулы погонных усилий и моментов:

1) в сечении  $x = \text{const}$ :

$$N_1 = \sum N_i^* \cos^2 \varphi_i / a_i; \quad M_1 = \sum M_i^* \cos^2 \varphi_i / a_i; \quad Q_1 = \sum Q_i^* \cos \varphi_i / a_i;$$

2) в сечении  $y = \text{const}$ :

$$N_2 = \sum N_i^* \sin^2 \varphi_i / a_i; \quad M_2 = \sum M_i^* \sin^2 \varphi_i / a_i; \quad Q_2 = \sum Q_i^* \sin \varphi_i / a_i.$$

Здесь усилия и моменты, отмеченные звездочкой, определяются в стержнях сетчатой полой оболочки.

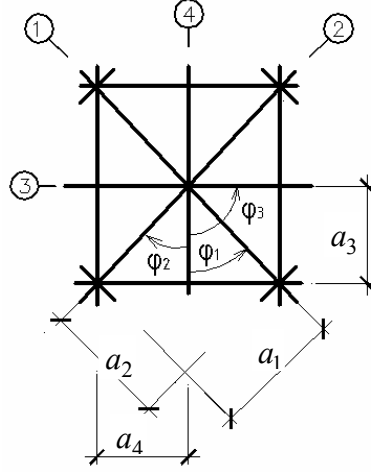
Значения погонных сдвигающих усилий и крутящих моментов определяются по формулам

$$S = S_1 = S_2 = \sum N_i^* \sin \varphi_i \cos \varphi_i / a_i;$$

$$H = H_1 = H_2 = -\sum M_i^* \sin \varphi_i \cos \varphi_i / a_i,$$

где индекс  $i = 1 \dots n$ ;  $n$  — количество семейства стержней сетки оболочки;  $\varphi_i$  — угол между осью  $x$  и осью стержня. При этом поворот от оси  $x$  к оси  $y$  считается положительным.

Примем, что сетка оболочки состоит из четырех семейств стержней ( $n = 4$ ), а стержни первого и второго семейств одинаковы, одинаковы также и расстояния между соседними стержнями:  $a_1 = a_2 = a$ . Углы  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$ ,  $\varphi_3 = 90^\circ$ ,  $\varphi_4 = 0$ .



Сетка оболочки

Используя зависимости  $a = 2a_3 \sin \varphi = 2a_4 \cos \varphi$ , приведем уравнения состояния к виду

$$N_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2; \quad N_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2;$$

$$S = S_1 = S_2 = C_{66}\omega;$$

$$M_1 = \beta_{11}\chi_1 + \beta_{12}\chi_2; \quad M_2 = \beta_{12}\chi_1 + \beta_{22}\chi_2;$$

$$H_1 = \beta_{31}\tau; \quad H_2 = \beta_{41}\tau,$$

$$\text{где } C_{11} = 2K \cos 4\varphi + K_4; \quad C_{12} = C_{66} = 2K \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \quad C_{22} = 2K \sin^4 \varphi + K_3;$$

$$\beta_{11} = -(2I \cos^4 \varphi + I_4 + 2C \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi); \quad \beta_{12} = -2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (I - C);$$

$$\beta_{22} = -(2I \sin^4 \varphi + I_3 + 2C \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi); \quad \beta_{31} = I \sin^2 2\varphi + 2C \cos^2 \varphi \cos 2\varphi + C_4;$$

$$\beta_{41} = I \sin^2 2\varphi - 2C \sin^2 \varphi \cos 2\varphi + C_3,$$

$$\text{где } K = \frac{EF}{a}; \quad K_3 = \frac{EF_3}{a_3}; \quad K_4 = \frac{EF_4}{a_4}; \quad I = \frac{EI_1}{a}; \quad I_3 = \frac{EI_3}{a_3}; \quad I_4 = \frac{EI_4}{a_4}; \quad C = GJ / a;$$

$$C_3 = GJ_3 / a_3; \quad C_4 = GJ_4 / a_4.$$

Для величин, относящихся к описанию сетки, приняты следующие обозначения:

$F_i, I_i, J_i$  — площадь, главные центральные моменты инерции, соответствующие изгибу, и моменты инерции при кручении поперечного сечения стержня;  $E_i, G_i$  — модуль Юнга, модуль упругости при сдвиге материала.

Преобразуем уравнения равновесия, для этого подставим (4) и (5) в (3):

$$-\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(H_1 + H_2) - \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - \frac{N_2}{R} + q_n = 0. \quad (6)$$

Уравнения (1) и (2) тождественно удовлетворяются, если ввести функцию  $\Phi(x, y)$ , для которой справедливы следующие условия:

$$N_1 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

Используя геометрические уравнения, перепишем выражения для погонных усилий для  $M_1, M_2, H_1$  и  $H_2$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\beta_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad M_2 = -\beta_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ H_1 &= -\beta_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad H_2 = -\beta_{41} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения (8) и второе выражение из (7) позволяют преобразовать (6) следующим образом:

$$\beta_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2\beta_{12} - \beta_{31} - \beta_{41}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial x^2} - q_n,$$

или:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - q_n; \\ \nabla^4 w &= \beta_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2\beta_{12} - \beta_{31} - \beta_{41}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \end{aligned}$$

Второе уравнение, связывающее перемещение  $w$  и функцию  $\Phi(x, y)$ , получим, воспользовавшись оставшимися физическими и геометрическими уравнениями.

Из физических и геометрических уравнений имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{C_{12}(N_1 - N_2)}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{C_{11}N_2 - C_{12}N_1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}; \quad \varpi = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Исключив из полученных уравнений перемещения  $u$  и  $v$ , выполнив несложные преобразования, получим второе уравнение:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \left[ C_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \left( \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{66}} - 2C_{12} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + C_{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right]$$

или

$$\nabla^4 \Phi = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (9)$$

$$\nabla^4 \Phi = \left[ C_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \left( \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{66}} - 2C_{12} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + C_{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right].$$

Применяя к (9) оператор  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , а к (14)  $\nabla^4$ , получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^4 \Phi = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2) \frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}; \quad (10)$$

$$\nabla^8 w = \frac{1}{R} \nabla^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nabla^4 q_n. \quad (11)$$

Эти уравнения решаются совместно.

Умножая (10) на  $\frac{1}{K}$  и сложив (11), получаем окончательно

$$\nabla^8 w + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 q_n.$$

Таким образом, расчет напряженно-деформированного состояния в пологой сетчатой цилиндрической оболочке свелся к отысканию решения двух уравнений в частных производных (10) и (11).

По известным функциям  $w$  и  $\Phi$  можно определить погонные усилия  $N_1, N_2, S$  и погонные моменты  $M_1, M_2, H_1, H_2$ .

Используя обратные зависимости, компоненты деформаций, усилий и моментов в стержнях можно определить деформации, усилия и моменты расчетной модели, а следовательно, и напряжения.

В частном случае, когда  $R \rightarrow \infty$ , получаем два независимых уравнения:

$$\nabla^4 w = -q_n. \quad (12)$$

$$\nabla^4 \Phi = 0. \quad (13)$$

Уравнение Софи Жермен (12) описывает изгиб пластинок, а бигармоническое уравнение (13) является разрешающим уравнение плоской задачи теории упругости, которое описывает напряженное состояние пластинки в ее плоскости.

Теория пологих сетчатых оболочек найдет применение для решения практически важных задач:

определения нагрузок оболочках, нагруженных постоянной или переменной внешней нагрузкой;

определения критических нагрузок в оболочках, работающих на устойчивость.

Следует отметить, что уравнения позволяют исследовать пологие цилиндрические оболочки, сетка которых может состоять из двух, трех или четырех семейств, т. е.  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М. : Наука, 1982. 352 с.

2. Беликов Г. И. Статика, динамика и устойчивость сетчатых и подкрепленных оболочек с учетом поперечного сдвига. Волгоград : ВолгГАСА, 2003. 298 с.

1. Pshenichnov G. I. Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok. M. : Nauka, 1982. 352 s.

2. Belikov G. I. Statika, dinamika i ustoychivost' setchatykh i podkreplennykh obolochek s uchetom poperechnogo sdviga. Volgograd : VolgGASA, 2003. 298 s.

© Беликов Г. И., Евтушенко С. И., 2013

Поступила в редакцию  
в сентябре 2013 г.

Ссылка для цитирования:

Беликов Г. И., Евтушенко С. И. Уравнения теории сетчатых пологих оболочек на базе континуальной расчетной модели // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2013. Вып. 2(27). URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Belikov-2013\\_2\(27\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Belikov-2013_2(27).pdf)