УДК 519.62

Н.Г. Бандурин

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Кратко описан численный метод и созданная впервые в истории математики и программирования программа для автоматического решения систем нелинейных интегро-дифференциально-алгебраических уравнений (ИДАУ) достаточно произвольной структуры. Теоретическое обоснование метода не приводится. Решены четыре тестовых примера.

К л ю ч е в ы е с л о в а: интегро-дифференциально-алгебраические уравнения, численные методы, компьютерные программы.

The numerical method and created for the first time in a history of mathematics and programming the program for the automatic solution of systems of the nonlinear integro-differential-algebraic equations of enough any structure is briefly described. The results of the solution of 4 test examples are resulted.

K e y w o r d: the integro-differential-algebraic equations, numerical methods, computer programs.

Ниже кратко описывается метод и программа для решения следующей системы N нелинейных интегро-дифференциально-алгебраических уравнений (ИДАУ):

$$\boldsymbol{f}\left[t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}'(t), \boldsymbol{y}''(t), ..., \boldsymbol{I}(t)\right] = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{f}$ — вектор-столбец размером N;

$$(\boldsymbol{y}(t))^T = (y_1(t), y_2(t), ..., y_N(t)); (\boldsymbol{I}(t))^T = (I_1(t), I_2(t), ...);$$

$$\boldsymbol{I}_i(t) = \int_0^t \psi_i\left[u, \boldsymbol{y}(u), \boldsymbol{y}'(u), ...\right] du.$$

Предполагается, что задан полный набор начальных условий при $t = 0$.

Ставится задача найти решение системы (1) на равномерной сетке $t_1 = 0,\ t_2, ..., t_M = b$ отрезка $[0, b]$. В литературе известны работы, в которых ставится задача решения ИДАУ методами не выше 4-го порядка точности [1, 2], но о программах для решения таких уравнений не упоминается. В настоящей работе по разработанной программе ИДАУ решаются автоматически методом 10-го порядка [3].

Метод решения. Для преобразования задачи Коши (1) к системе алгебраических уравнений в алгоритме используется формула интегрирования [3]

$$\boldsymbol{Y}^{(k-p)} = \sum_{m=0}^{p-1} S^m \boldsymbol{I} y_1^{(k-p+m)} + S^p \boldsymbol{Y}^{(k)} \text{ при } p \le k, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{Y}^{(r)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{I}$ — вектор узловых значений производных функций порядка r размером M, вектор узловых значений функций и единичный вектор соответственно; S, E — матрица интегрирования и единичная матрица соответственно; $y_1^{(r)}$ — значения производных порядка r функций при $t = t1 = 0$.

Подробный вывод формулы (2) изложен в [3].

Для решения системы (1) принят «метод шагов» [4], в соответствии с которым весь промежуток интегрирования $[0, b]$ должен быть представлен в виде Q больших шагов длиной τ, т.е. принимается $b = Q\tau$. Для численной реализации метода каждый большой шаг разбивается на $m-1$ малых шагов. В результате работы программы на печать выводятся таблицы искомых функций, а также графики $y = f(t),\ y_i = f(y_j),\ y_i' = f(y_i)$.

Тестовые примеры. Все приведенные ниже системы ИДАУ решаются с помощью разработанной программы в течение нескольких минут, включая и время подготовки исходных данных. Для всех этих тестовых примеров итерационный процесс начинался из нулевого приближения.

П р и м е р 1. Система четырех нелинейных интегро-алгебраических уравнений (ИАУ):

$$y_1 + y_4^3 + \int_{-1}^{t} y_3(u)du - t^3 - 1{,}5t^2 + t + 0{,}5 = 0,$$

$$y_2 + y_1 + \int_{-1}^{t} y_3(u)y_4(u)du + 2t^3/3 - 10{,}5t^2 - 17/6 = 0,$$

$$y_3 - y_2 + t^2 y_4 - 10t^2 - t = 0,$$

$$y_4 + \sin(y_4) - y_1 - \sin t + t^2 - t + 1 = 0.$$

Точное решение $y_1(t) = t^2 + 1,\ y_2(t) = -t^3 + 10t^2 + 1,\ y_3(t) = t - 1,\ y_4(t) = t.$

Решение следует найти в интервале $0 \le t \le 6$.

Для работы программы в качестве исходных данных должны быть заданы значения функций в начальной точке $t = -1$.

Наибольшие значения отклонения приближенного решения от точного Δ получены для третьей функции. Эти отклонения для двух величин шага сетки h оказались следующими: $\Delta_{h=0{,}08} = 3{,}1 \cdot 10^{-5}$, $\Delta_{h=0{,}02} = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$.

Точность решения в этой задаче почти не зависит от шага сетки, причем итерационный процесс сходится в узком интервале изменения шага сетки.

П р и м е р 2. Система четырех нелинейных ИДАУ

$$y_1' + \sin(y_3) - \exp(t) - \sin(\sin t) = 0,$$

$$y_2'' + \int_0^t \left[y_2'(u) w_3(u) \right] du - \exp(-t)(1 + (\sin t + \cos t))/2 - 0{,}5 = 0,$$

$$y_3 + y_1 + \exp(y_3) - \sin t - \exp(t) - \exp(\sin t) = 0,$$

$$y_4 + \int_0^t \left[y_1(u) + y_2(u) \right] du - \exp(-t) - \cos t - \exp t + \exp(-t) = 0.$$

Точное решение $y_1(t) = \exp t,\ y_2(t) = \exp(-t),\ y_3(t) = \sin t,\ y_4(t) = \cos t.$

Решение следует найти в интервале $0 \le t \le 10$.

Наибольшие значения отклонения приближенного решения от точного Δ получены для первой функции. Эти отклонения для разных величин шага сетки h оказались следующими:

$$\Delta_{h=0{,}2} = 6{,}0 \cdot 10^{-6},\ \Delta_{h=0{,}1} = 7{,}8 \cdot 10^{-9},\ \Delta_{h=0{,}05} = 1{,}6 \cdot 10^{-9},\ \Delta_{h=0{,}025} = 1{,}7 \cdot 10^{-9}.$$

Итерационный процесс для этой системы уравнений устойчив, сходимость наблюдается в достаточно широком интервале изменения h, но при слишком мелкой сетке появляется погрешность за счет округления чисел.

П р и м е р 3. Система трех нелинейных ИАУ

$$y_1 + y_2 - \int_0^t y_1(u)du + y_3 - \exp(-t) - \sin t - 1 = 0,$$

$$y_2 + \int_0^t y_1(u)du - \exp(-t) - \exp t + 1 = 0,$$

$$y_3 + y_2 - \exp(-t) - \sin t = 0.$$

Точное решение: $y_1(t) = \exp t,\ \ y_2(t) = \exp(-t),\ \ y_3(t) = \sin t.$

Решение следует найти в интервале $0 \le t \le 10$.

Максимальные значения Δ для 3-й функции:

$$\Delta_{h=0,2} = 4,6\cdot 10^{-5},\ \Delta_{h=0,1} = 4,5\cdot 10^{-8},\ \Delta_{h=0,05} = 9,4\cdot 10^{-9},\ \Delta_{h=0,01} = 6,2\cdot 10^{-9}.$$

П р и м е р 4. Система четырех нелинейных ИДАУ

$$y_1''' + \int_0^t y_3(u)du + y_3 - sht - 1 = 0,$$

$$y_2 + y_1'' + y_4 - cht - \exp t - t = 0,$$

$$y_3 - \int_0^t y_4(u)du + y_4 - \exp(-t) - 1 = 0,$$

$$y_4 - \int_0^t y_4(u)du - y_3 + \exp(-t) - 1 = 0.$$

Точное решение $y_1(t) = \mathrm{ch}t,\ \ y_2(t) = t,\ \ y_3(t) = \exp(-t),\ \ \ y_4(t) = \exp(t).$

Решение следует найти в интервале $0 \le t \le 10$.

Наибольшие значения отклонения приближенного решения от точного Δ получены для 2-й функции. Эти отклонения для разных величин шага сетки h оказались следующими:

$$\Delta_{h=0,2} = 4,8\cdot 10^{-5},\ \Delta_{h=0,1} = 4,9\cdot 10^{-8},\ \Delta_{h=0,05} = 1,0\cdot 10^{-8},\ \Delta_{h=0,025} = 1,0\cdot 10^{-8}.$$

На основе анализа приведенных результатов решения конкретных задач можно заключить, что разработанная программа является уникальной и позволяет в автоматическом режиме с высокой точностью получать решение систем нелинейных ИДАУ достаточно общего вида.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кузнецов Е.Б.* Об одной формулировке задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1995. Т. 50. № 3. С. 149—150.

2. *Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б.* Численное решение систем интегро-дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 3. С. 430—444.

3. *Бандурин Н.Г.* Новый численный метод порядка *n* для решения интегро-дифференциальных уравнений общего вида // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 2. С. 3—10.

4. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971. 296 с.

Поступила в редакцию в декабре 2009 г.