

УДК 51-74

**С. В. Ерохин**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Представлены модели ползучести и релаксации материалов, основанные на производных дробного порядка. Описан метод определения параметров моделей, позволяющий предсказывать поведение системы.

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** ползучесть, релаксация, производные дробного порядка.

The article presents the models of material creep and relaxation based on fractional derivatives. Models parameter determination that allows to predict the system's behavior is described.

**К e y w o r d s:** creep, relaxation, fractional derivatives.

**Моделирование ползучести.** Теория линейной вязкоупругости применяется при исследовании ползучести бетонов и некоторых других строительных материалов, грунтов, горных пород и т. п. Железобетону также свойственны явления ползучести и релаксации, следствием которых является перераспределение усилий между бетоном и арматурой.

Ползучесть материалов (последствие) — деформация с течением времени твердого тела под воздействием постоянной нагрузки или механического напряжения. Ползучести в той или иной мере подвержены все твердые тела — как кристаллические, так и аморфные. С математической точки зрения это означает, что зависимость между напряжениями и деформациями материала содержит время в явном виде или посредством операторов.

Явление ползучести было замечено К. Навье (1826 г.), Г. Кориолисом (1830 г.), но впервые количественно изучено Л. Вика (1834 г.). Систематические исследования ползучести металлов и сплавов, резин и стекол относятся к началу XX в., особенно к 40-м гг., когда в связи с развитием техники ученые столкнулись, например, с ползучестью дисков и лопаток паровых и газовых турбин, реактивных двигателей и ракет, в которых значительный нагрев сочетается с механическими нагрузками. Потребовались материалы (жаропрочные сплавы), детали из которых длительное время выдерживали бы нагрузки при повышенных температурах. Долгое время считалось, что ползучесть может происходить только при повышенных температурах, однако она имеет место и при очень низких температурах, так, например, у кадмия заметная ползучесть наблюдается при температуре  $-269^{\circ}\text{C}$ , а у железа — при  $-169^{\circ}\text{C}$ .

По современным представлениям [1—4] материал элемента конструкции (бетон, арматура, дерево) рассматривается как неравновесная термодинамическая система, механическое состояние которой при одноосном нагружении описывается уравнениями деформации и напряжений. При этом элемент конструкции представляется объединением волокон (слоев, звеньев) со статистически распределенными прочностями и с одинаковым модулем упруго-пластических деформаций. Возрастающее усилие влечет разрушение части волокон, силовое сопротивление оказывают лишь целые волокна.

Важнейшей задачей, возникающей при проектировании новых и обследовании существующих зданий и сооружений, является прогнозирование их срока службы, а также определение реальной картины деформирования конструкций во времени, выполненных преимущественно из железобетона, который, как известно, является весьма сложным материалом, деформирующимся во времени. Решение этой задачи невозможно без построения адекватной математической модели ползучести.

Теория наследственной ползучести Больцмана — Вольтерры основана на предположении, что деформация в текущий момент времени зависит не только от величины напряжения в тот же момент, но и от предыстории деформирования. При этом учет предшествующих деформаций проводится в соответствии с принципом суперпозиции, согласно которому величина деформации в момент времени  $t$ , возникшей в результате напряжений  $\sigma(\tau)$ , действовавших до этого момента, равна

$$p(t) = \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau,$$

где  $K(t-\tau)$  — ядро ползучести.

Это должна быть убывающая функция от  $t$ , поскольку с течением времени влияние предыдущих нагрузок снижается. Зависимость от разности аргументов  $(t-\tau)$  свидетельствует об инвариантности ядра по отношению к началу отсчета времени [5—8].

В стандартной модели [9] уравнение ползучести, обусловленной только внутренним трением самого материала и наличием постоянной внешней осевой нагрузки  $Q_0$ , имеет вид

$$2nx'(t) + cx(t) = Q_0, \quad (1)$$

где  $2nx'(t)$  — сила диссипации;  $cx$  — восстанавливающая упругая сила.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$Dx(t) + \beta x(t) = k, \quad (2)$$

где  $Dx$  — производная первого порядка;  $\beta = \frac{c}{2n}$ ,  $k = \frac{Q_0}{2n}$ .

Дифференциальное уравнение (2) имеет решение

$$x(t) = \frac{k}{\beta} (1 - e^{-\beta t}).$$

Заметим, что соответствующая уравнению (1) модель стандартного линейного тела  $c(t) = x(t) + e_0$ , где  $c(t)$  и  $e_0$  — полная и мгновенная деформации ползучести, является весьма распространенной в реологии. Однако ее существенным недостатком является отсутствие сингулярности в момент времени  $t = 0$ , что, строго говоря, неприемлемо для корректного описания ползучести. Действительно, для всех без исключения материалов имеет место начальная асимптотика кривых простой ползучести в форме параболы дробного порядка  $mt^r$ , где  $m$  — коэффициент пропорциональности, а  $0 < r < 1$ . Ограничиваясь

затухающей ползучестью пластмасс, бетонов, композитов и им подобных материалов, что имеет место при относительно малых и умеренных напряжениях, будем описывать упомянутую сингулярность, как и сами кривые ползучести, с помощью дробных производных.

В случае, когда параметр  $\beta$  не зависит от времени, что справедливо для всех структурно стабильных материалов, будем считать диссипативную силу пропорциональной производной некоторого дробного порядка  $0 < r < 1$  [10]:

$$D^r x(t) + \beta x(t) = k, \quad (2)$$

где

$$D^r x(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-r-1}}{\Gamma(-r)} x(\tau) d\tau.$$

Отметим, что определение дробной производной естественным образом порождает не сингулярное ядро ползучести типа Абеля:

$$K(t-\tau) = \frac{C}{(t-\tau)^\alpha}.$$

Решение уравнения (2) можно выразить в виде суммы сходящегося ряда:

$$x(t) = k \left[ \frac{t^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t^{2r}}{\Gamma(2r+1)} + \dots \right]. \quad (3)$$

Оставим в ряду (3) только два первых слагаемых, остальными можно пренебречь:

$$x(t) \approx k \left[ \frac{t^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right].$$

Если известны три результата экспериментальных наблюдений,  $x(t_1) = x_1$ ,  $x(t_2) = x_2$ ,  $x(t_3) = x_3$ , то получаем систему уравнений для параметров  $k$ ,  $\beta$ ,  $r$ :

$$\begin{cases} x_1 = k \left[ \frac{t_1^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_1^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right], \\ x_2 = k \left[ \frac{t_2^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_2^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right], \\ x_3 = k \left[ \frac{t_3^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_3^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right]. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{t_1^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_1^{2r}}{\Gamma(2r+1)}}{\frac{t_2^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_2^{2r}}{\Gamma(2r+1)}},$$

откуда после преобразований получаем

$$\beta = \frac{\Gamma(2r+1)}{\Gamma(r+1)} \frac{x_2 t_1^r - x_1 t_2^r}{x_2 t_1^{2r} - x_1 t_2^{2r}}.$$

Если проделать те же операции с первой и третьей строками, то получим

$$\beta = \frac{\Gamma(2r+1)}{\Gamma(r+1)} \frac{x_3 t_1^r - x_1 t_3^r}{x_3 t_1^{2r} - x_1 t_3^{2r}}.$$

Отсюда получается уравнение для  $r$ :

$$\frac{x_2 t_1^r - x_1 t_2^r}{x_2 t_1^{2r} - x_1 t_2^{2r}} = \frac{x_3 t_1^r - x_1 t_3^r}{x_3 t_1^{2r} - x_1 t_3^{2r}}.$$

Оно имеет тривиальное решение  $r = 0$  и одно нетривиальное  $0 < r < 1$ .

Это уравнение аналитически неразрешимо. Чтобы увидеть его приближенно, построим график функции

$$f(r) = \frac{x_2 t_1^r - x_1 t_2^r}{x_2 t_1^{2r} - x_1 t_2^{2r}} - \frac{x_3 t_1^r - x_1 t_3^r}{x_3 t_1^{2r} - x_1 t_3^{2r}}. \quad (4)$$

При данных кривой 2 (рис. 1)  $x(10) = 1/30$ ,  $x(100) = 1/15$ ,  $x(1000) = 1/10$ .

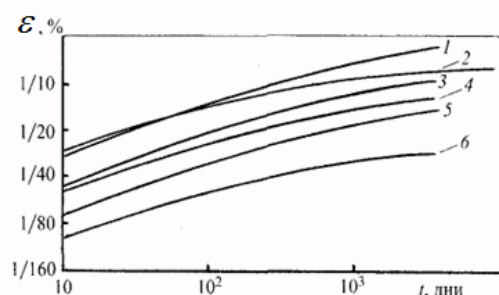


Рис. 1. Кривые ползучести бетона при постоянных значениях напряжения и возраста: 1, 3, 5 — возраст 90 дней, напряжение 8,4; 6,3; 4,2 МПа соответственно; 2, 4, 6 — возраст 28 дней, напряжение 6,3; 4,2; 2,1 МПа соответственно

Методом последовательных приближений находим нетривиальное решение уравнения  $f(r) = 0$ ,  $r \approx 0,37$ , что хорошо согласуется с номографическими методиками [9].

**Моделирование релаксации.** В глобальном смысле явление релаксации представляет собой процесс установления термодинамического, а следовательно, и статистического равновесия в физической системе, состоящей из большого числа частиц.

Для строительных материалов, бетонов, полимеров, металлов, грунтов релаксация — это свойство материала самопроизвольно снижать напряжения, при условии что начальная величина деформации зафиксирована жесткими связями и остается неизменной. При релаксации напряжений может измениться характер начальной деформации, например из упругой постепенно перейти в необратимую (пластическую), при этом изменения размеров не

происходит. Такое исчезновение напряжений возможно за счет межмолекулярных перемещений и переориентации внутримолекулярной структуры.

Для корректного описания релаксации может быть использована обобщенная модель Максвелла:

$$\frac{1}{E} D^\beta \sigma(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) = 0, \quad \sigma(0) = E \varepsilon_0, \quad (5)$$

где  $E, \eta$  — параметры модели;  $\varepsilon_0$  — постоянная деформация.

Решение задачи (5), согласно теореме существования и единственности решения задачи Коши, для дифференциального уравнения дробного порядка выражается через функцию Миттаг-Леффлера:

$$\sigma(t) = \sigma(0) E_\beta(-\gamma t^\beta), \quad (6)$$

где  $\gamma = \frac{\eta}{E}$ ,  $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$  — функция Миттаг-Леффлера.

Функция Миттаг-Леффлера имеет асимптотику:

$$E_\beta(-\gamma t^\beta) \sim \begin{cases} 1 - \frac{\gamma t^\beta}{\Gamma(1+\beta)}, & t \rightarrow 0+, \\ \frac{1}{\gamma} \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, & t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Эта асимптотика хорошо согласуется с наблюдаемыми экспериментально сингулярностью в начальный момент времени и последующим степенным законом релаксации напряжения.

По аналогии с моделью ползучести можно сформулировать обратную задачу параметрической идентификации обобщенной модели Максвелла (5) по экспериментальным данным (кривым релаксации). Значения параметров модели имеют большое значение для прогнозирования.

Для точной параметрической идентификации необходимо определить параметры функции Миттаг-Леффлера, что является довольно сложной задачей и требует привлечения методов дробного анализа. Но на практике точная идентификация невозможна в силу погрешности ошибок измерений и других стохастических факторов. Поэтому рассмотрим задачу разработки простой методики параметрической идентификации с допустимой погрешностью.

Важно отметить, что параметры модели (5) определяются структурными свойствами материала и инварианты к входным данным эксперимента. Будем также считать их постоянными, что справедливо для структурно стабильных материалов и неэкстремальных нагрузок и деформаций.

Для определения параметров модели воспользуемся асимптотическими формулами (7). Так, при  $t \sim 0$  можно записать:

$$\sigma(t) \sim \sigma(0) \left( 1 - \frac{\gamma t^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \right). \quad (8)$$

Если в ходе эксперимента помимо значения начального напряжения  $\sigma(0) = \sigma_o = E_o \varepsilon_o$  известны еще хотя бы два близких к нему значения  $\sigma(t_1) = \sigma_1$  и  $\sigma(t_2) = \sigma_2$ , то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sigma_1 \sim \sigma_o \left( 1 - \frac{\gamma t_1^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \right), \\ \sigma_2 \sim \sigma_o \left( 1 - \frac{\gamma t_2^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \right), \end{cases}$$

откуда ключевой параметр  $\beta$  определяется по формуле

$$\beta_o \sim \log_{\frac{t_1}{t_2}} \frac{\sigma_o - \sigma_1}{\sigma_o - \sigma_2}. \quad (9)$$

При последующем течении эксперимента напряжение в образце можно аппроксимировать выражением

$$\sigma(t) \sim \sigma(0) \left( \frac{1 - t^{-\beta}}{\gamma \Gamma(1-\beta)} \right). \quad (10)$$

Для уточнения значения параметра, вычисленного по формуле (9), необходимо взять еще два значения напряжения  $\sigma(t_3) = \sigma_3$  и  $\sigma(t_4) = \sigma_4$ , причем  $t_3, t_4 \gg t_1, t_2$ . После аналогичных преобразований из (10) получим вторую формулу для параметра  $\beta$ :

$$\beta_\infty \sim \log_{\frac{t_3}{t_4}} \frac{\sigma_4}{\sigma_3}. \quad (11)$$

Соответствие результатов, полученных по формулам (9) и (11), будет свидетельствовать о точности параметрической идентификации. Использование дополнительных объемов экспериментальных данных позволяет повысить точность расчетов.

Следует отметить, что при найденных параметрах модель (5)—(6) будет описывать кривую релаксации для любой неэкстремальной начальной деформации и на всем отрезке наблюдения. Этот факт следует из инвариантности параметров модели.

Для апробации методики обработаны кривые релаксации образцов мерзлого грунта (рис. 2) [11].

По формулам (9), (11) для образца мерзлого грунта получены следующие результаты:

$$\beta_o \approx 0,47, \beta_\infty \approx 0,44,$$

что свидетельствует о хорошей точности методики. Расхождения в значениях обусловлены ошибками измерений и погрешностью аппроксимации (7).

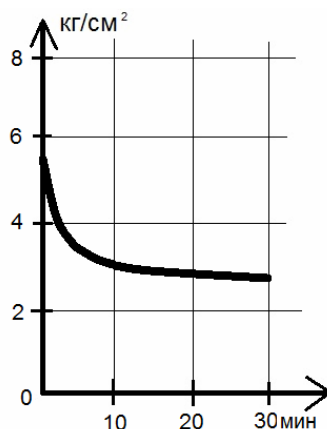


Рис. 2. Экспериментальная кривая релаксации напряжения в образце мерзлого грунта

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савостьянов В. Н., Фриштер Л. Ю. Моделирование кусочно-однородной задачи механики деформируемого твердого тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 6. С. 38.
2. Фриштер Л. Ю. Анализ методов исследования локального напряженно-деформированного состояния конструкций в зонах концентрации напряжений // Вестник Московского государственного строительного университета. 2008. № 3. С. 38—44.
3. Фриштер Л. Ю., Мозгалева М. Л. Сопоставление возможностей численного и экспериментального моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом их геометрической нелинейности // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010. Т. 6. № 1—2. Р. 221—222.
4. Бондаренко В. М., Ларионов Е. А. Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях элементов конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 2. С. 40—48.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.
6. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М. : Высшая школа, 1976. 277 с.
7. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М. : Машиностроение-1, 2005. 226 с.
8. Кирьянова Л. В., Усманов А. Р. Оценка спектральной плотности аэродинамического коэффициента лобового сопротивления. Вестник Московского государственного строительного университета. 2012. № 10. С. 88—94.
9. Маньковский В. А., Сапунов В. Т. Номографические свойства дробно-экспоненциальной Э-функции при описании линейной вязкоупругости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66. № 3. С. 47—50.
10. Мясников А. Г., Сазонов Л. И. Сингулярные интегральные операторы с некарлеменовским сдвигом // Известия высших учебных заведений. Математика. 1980. № 3. С. 22.
11. Вялов С. С. Ползучесть и длительное сопротивление мерзлых грунтов // Доклады АН СССР. Сер.: Геофизика. 1955. Т. 104. № 6. С. 850—854.

1. Savost'yanov V. N., Frishter L. Yu. Modelirovanie kusochno-odnorodnoi zadachi mekhaniki deformiruемого твердого тела // Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 1993. № 6. S. 38.
2. Frishter L. Yu. Analiz metodov issledovaniya lokal'nogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstruktssii v zonakh kontsentratsii napryazhenii // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo stroitel'nogo universiteta. 2008. № 3. S. 38—44.
3. Frishter L. Yu., Mozgaleva M. L. Sopostavlenie vozmozhnostei chislenno i eksperimental'nogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstruktssii s uchetom ikh

geometrichekoi nelineinosti // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010. Т. 6. № 1—2. P. 221—222.

4. *Bondarenko V. M., Larionov E. A.* Printsip nalozheniya deformatsii pri strukturnykh povrezhdeniyakh elementov konstruksii // Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii I sooruzhenii. 2011. № 2. С. 40—48.

5. *Rabotnov Yu. N.* Polzuchest' elementov konstruksii. М. : Nauka, 1966. 752 с.

6. *Koltunov M. A.* Polzuchest' i relaksatsiya. М. : Vysshaya shkola, 1976. 277 с.

7. *Radchenko V. P., Saushkin M. N.* Polzuchest' i relaksatsiya ostatochnykh napryazhenii v uprochnennykh konstruksiyakh. М. : Mashinostroenie-1, 2005. 226 с.

8. *Kir'yanova L. V., Usmanov A. R.* Otsenka spektral'noi plotnosti aerodinamicheskogo koefitsienta lobovogo soprotivleniya. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo stroitel'no-go universiteta. 2012. № 10. S. 88—94.

9. *Man'kovskii V. A., Sapunov V. T.* Nomograficheskie svoystva drobno-eksponentsial'noi E-funktsii pri opisani lineinoi vyazkouprugosti // Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. 2000. Т. 66. № 3. С. 47—50.

10. *Myasnikov A. G., Sazonov L. I.* Singulyarnye integral'nye operatory s nekarlemenovskim sdvigom // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika. 1980. № 3. S. 22.

11. *Vyalov S. S.* Polzuchest' i dlitel'noe soprotivlenie merzlykh gruntov // Doklady AN SSSR. Ser.: Geofizika. 1955. Т. 104. № 6. С. 850—854.

© Ерохин С. В., 2015

*Поступила в редакцию  
в сентябре 2015 г.*

*Ссылка для цитирования:*

*Ерохин С. В.* Моделирование ползучести и релаксации с использованием производных дробного порядка // Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2015. Вып. 4(40). Ст. 8. Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>

*For citation:*

*Erokhin S. V.* [Modelling of creep and relaxation with the use of fractional derivatives]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2015, no. 4(40), paper 8. (In Russ.). Available at: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>