УДК 624.042

В. А. Игнатьев, В. Н. Ромашкин

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИЙ (ОБЗОР)

Выполнен актуальный обзор методов понижения порядка и решения обобщенной алгебраической проблемы СЗ и СВ высокого порядка, возникающей при применении МКЭ или метода перемещений к решению задач строительной механики на свободные колебания и устойчивость. Решению данной проблемы посвящено большое число работ как зарубежных, так и отечественных авторов, в основном отличающихся способом построения подпространства базисных векторов. Среди этих работ четко выделяются итерационные и редукционные методы, применяемые различными школами и группами исследователей. В данной работе выполнена их систематизация, классификация и анализ, позволяющие дать представление о современном положении дел в этой области исследований.

К л ю ч е в ы е с л о в а: алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений, динамика и устойчивость конструкций, итерационные методы для разреженных матриц, предобуславливание, редукционные методы.

The authors carry out a comprehensive review of methods for reduction of the order and solution of generalized algebraic problem of eigenvalue and eigenvector of high order which occur when using finite element method and method of movement to the solution of the task of structural mechanics on free vibrations and stability. Solution of the eigenvalue problem might be found in a large number of scientific works, both foreign and domestic authors, mainly differ in the way of construction of the subspace of basis vectors. Among these works iterative and reduction methods which are used by various schools and groups of researches are clearly distinguished. In this study, arrangement, classification and analysis of these methods are performed. The goal is to provide wide and structured outlook at the current situation in this field of research.

K e y w o r d s: algebraic problem of eigenvector and eigenvalue, dynamics and stability of structures, sparse iterative solvers, preconditioning, model order reduction.

В настоящее время процесс создания инженерных конструкций включает обязательный этап моделирования и последующего анализа их напряженно-деформированного состояния с учетом различных видов нагружений и воздействий внешних сред.

Большинство современных конструкций и сооружений являются системами с усложненной структурой, большими размерами, сложной геометрической формой и работают в сложном напряженно-деформированном состоянии [1].

Динамический анализ расчетных моделей таких систем является важной и неотъемлемой частью общего анализа конструкции и подготовки к началу возведения. В процессе данного анализа исследуются свободные и вынужденные колебания как отдельных ее элементов, так и всей конструкции в целом, а также расчет на общую устойчивость. Параметры этих колебаний определяют пригодность конструкции по критериям прочности, амплитудным значениям перемещений, уровням перегрузок или иным конкретным для каждой конструкции показателям.

Применение численных методов к решению задач динамики и устойчивости конструкций приводит к необходимости решать алгебраическую проблему собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ). Найденные СЗ и СВ соответствуют частотам и формам колебаний конструкции. При решении проблемы СЗ и СВ выделяется полная проблема, когда необходимо определить все СЗ и соответствующие им СВ, и частичная (неполная), когда определению подлежит лишь небольшое количество (обычно старших или младших) СЗ и СВ. Следует отметить, что решение полной проблемы СЗ и СВ возможно только для систем относительно невысокого порядка и является сейчас, по сути, закрытой проблемой. Практическое значение во многих случаях имеет именно неполная алгебраическая проблема СЗ и СВ, так как даже в достаточно сложных и больших системах инженера интересуют лишь несколько первых частот и форм собственных колебаний.

Бурный рост вычислительной техники и эволюция численных методов во второй половине 20 века привели к созданию универсального численного метода конечных элементов (МКЭ), который используется сейчас для решения широкого класса как статических, так и динамических задач в различных областях науки и техники. При применении этого метода исходная конструкция представляется в виде совокупности конечных элементов, а заданная точность достигается путем сгущения сетки конечных элементов.

Несмотря на то, что скорость работы и объем памяти компьютеров регулярно удваивается каждые 18 месяцев (согласно закону Мура), анализ с использованием МКЭ показывает феномен постоянного превышения требований над существующими возможностями ЭВМ.

В последние несколько лет размерность МКЭ-моделей резко возросла. Это обусловлено несколькими факторами:

1) рост этажности жилищного и гражданского строительства;

2) повышение требований к точности и достоверности результатов расчета, что заставляет применять более подробные расчетные модели;

3) наличие регламентируемых нормами проектирования расчетных сочетаний, среди которых часть нагружений — статические (собственный вес, вес оборудования и т. д.), а часть — динамические (сейсмика, ветер, удар, навал, вибрации оборудования и др.). Если во многих случаях при статическом расчете еще как-то можно оправдать анализ изолированного фрагмента конструкции, то при динамическом расчете такая фрагментация во многих случаях приводит просто к неверным результатам. Таким образом, динамические расчеты часто предопределяют высокую размерность расчетной модели;

4) развитие высокопроизводительных графических препроцессоров, включающих автоматические генераторы КЭ-сеток, позволяющие создавать детальные КЭ-модели.

5) задачи, содержащие сложные области с отверстиями, вырезами, примыканиями стержневых элементов к пластинам и оболочкам, зоны с концентрацией напряжений и быстро осциллирующих решений, требующие сгущения сетки КЭ [2].

В настоящее время порядок систем уравнений большеразмерных МКЭ-моделей достигает 500 тыс. — 1 млн уравнений и выше. Наличие современных суперкомпьютеров и параллельных технологий позволяет частично решить эту проблему. Однако их возможности не всегда доступны для рядовых инженеров и исследователей, а процесс моделирования с их применением может оказаться достаточно трудоемким и сложным. Ресурсы обычных персональных компьютеров (их скорость работы и объем памяти) остаются все еще ограниченными.

В отличие от задач механики деформируемого твердого тела большинство задач строительной механики являются плохо обусловленными. Это приводит к тому, что традиционные итерационные методы решения соответствующих систем МКЭ-уравнений либо сходятся медленно, либо вообще не сходятся. Причины плохой обусловленности заключаются в следующем:

1) наличие большого разброса жесткостей МКЭ-модели вследствие применения большого количества разнотипных конечных элементов различной жесткости;

2) сложная геометрия и многосвязность контуров, порождающих конечные элементы пластин и оболочек. Наличие особых зон с отверстиями, вырезами и узкими полосами [2].

Особенно остро описанные проблемы стоят в случае решения обобщенной проблемы СЗ и СВ, содержащей высокий порядок матриц жесткости и масс, входящих в уравнение.

Таким образом, даже несмотря на стремительный рост вычислительной техники в последнее время, разработка эффективных методов решения неполной проблемы СЗ и СВ высокого порядка остается актуальной задачей.

Реальное инженерное сооружение представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы, динамика которой описывается сложными дифференциальными уравнениями второго порядка. Результатом решения этих уравнений является нахождение непрерывной функции изменения перемещений во времени. Точное решение таких дифференциальных уравнений приводит к трудоемкому процессу решения на ЭВМ, поэтому используются различные приближенные методы строительной механики (Бубнова — Галеркина, Релея — Ритца, взвешенных невязок, конечных разностей, МКЭ и другие). Их использование дает возможность представить инженерное сооружение в виде дискретной расчетной модели с конечным числом степеней свободы, описываемых системой алгебраических уравнений. Результатом решения этой системы уравнений является величина перемещений конструкции в узлах дискретизации в определенный момент времени.

В случае решения задач динамики и устойчивости дифференциальные уравнения движения сводятся к системе алгебраических уравнений, называемой алгебраической проблемой СЗ и СВ. При анализе современных сложных конструкций требуемое для достаточно полного их представления число степеней свободы может достигать нескольких миллионов. Решение полной проблемы СЗ и СВ для таких моделей является неподъемной задачей даже для современных ЭВМ. С другой стороны, для большинства практических задач интерес представляет только нижняя часть спектра частот и форм собственных колебаний.

В связи с этим в настоящее время большое внимание также уделяется разработке приближенных методов определения низших частот и форм собственных колебаний сложных конструкций.

Математическая постановка проблемы. Уравнение движения любой динамической системы, находящейся в равновесии сил, действующих на нее, в соответствии с принципом Даламбера может быть записано в виде:

$$m\ddot{\upsilon}(t)+c\dot{\upsilon}(t)+k\upsilon(t)=p(t), \tag{1}$$

где $m\ddot{\upsilon}(t)$ — вектор сил инерции; $c\dot{\upsilon}(t)$ — вектор сил диссипации (затухания); $k\upsilon(t)$ — вектор сил упругости; $p(t)$ — вектор внешних сил; k, m, c — упругие (жесткость), массовые, демпферные характеристики системы; υ — вектор перемещений системы; все векторы зависят от времени.

Дискретизация (1) по МКЭ позволяет перейти к матричной форме записи:

$$M\overset{**}{U}+C\overset{*}{U}+KU=R, \tag{2}$$

где M, C и K — соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости порядка $n\times n$, каждый элемент которых является действительным числом; R — вектор внешней узловой нагрузки; U, $\overset{*}{U}$, $\overset{**}{U}$ — векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений ансамбля конечных элементов; n — число степеней свободы.

Уравнение (2) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка, размерность которой определяется числом степеней свободы, полученных при дискретизации.

В случае задач на свободные колебания без учета демпфирования система уравнений (2) записывается в упрощенном виде:

$$M\overset{**}{U}+KU=0. \tag{3}$$

Решение уравнений (3) может быть записано в форме:

$$U=\varphi\sin\omega(t-t_0), \tag{4}$$

где φ — вектор амплитуд колебаний; ω — угловая частота колебаний; t_0 — начальная фаза; t — время.

Дифференцируя (4) и подставляя в (3), получаем обобщенную алгебраическую проблему СЗ и СВ:

$$\left[K-\omega^2 M\right]\{\varphi\}=0. \tag{5}$$

Проблема СЗ (5) имеет n собственных решений $\left(\omega_1^2,\varphi_1\right),\left(\omega_2^2,\varphi_2\right),\ldots,\left(\omega_n^2,\varphi_n\right)$. Каждый вектор φ_i является вектором i-й собственной формы, а ω_i — частота свободных колебаний, соответствующая СЗ ($\lambda=\omega^2$). Совокупность λ_1, λ_2, λ_3, …, λ_n называется спектром СЗ. В зависимости от того, какая часть спектра подлежит определению, система уравнений (5) может быть приведена к стандартной форме:

$$\left[C-\lambda E\right]\{\varphi\}=0, \tag{6}$$

где $C=K^{-1}M$, $\lambda=1/\omega^2$.

или к виду:

$$\left[C-\lambda E\right]\{\varphi\}=0, \tag{7}$$

где $C = M^{-1}K$, $\lambda = \omega^2$.

Формы записи (6) и (7) также известны как стандартная алгебраическая проблема СЗ и СВ, получаемые при применении метода сил или метода перемещений.

Выше упоминалось, что число n степеней свободы современных сложных конструкций может быть большим (300 тыс. — 1 млн и выше), поэтому порядок матриц K и M, входящих в уравнение (5), является высоким. Кроме того, в силу специфики сопряжения КЭ матрицы K и M обладают сильной разреженностью и симметрией относительно главной диагонали.

Особое практическое значение имеет решение системы уравнений в форме МКЭ (5), так как данный универсальный метод реализован в большинстве современных профессиональных пакетов для инженерных расчетов сооружений.

Приведение (5) к стандартной форме (6) или (7) оказывается не эффективным, так как в явном виде требует трудоемкой процедуры обращения матрицы высокого порядка и не сохраняет разреженную структуру, что принципиально для больших задач.

На сегодняшний день решение алгебраической проблемы СЗ и СВ для плотных матриц небольшого порядка как в теоретическом, так и в практическом аспекте является закрытой проблемой. В настоящее время созданы эффективные автоматические численные процедуры, не требующие вмешательства пользователя [3—9]. Нахождение полного спектра СЗ для разреженных систем уравнений высокого порядка требует значительных численных затрат и не всегда оправдано. Часто в инженерной практике не требуется определять все собственные пары, а достаточно найти только несколько собственных пар из нижней части спектра.

Методы решения обобщенной алгебраической проблемы СЗ и СВ высокого порядка. В настоящее время в решении неполной обобщенной проблемы СЗ высокого порядка применяются две группы методов: итерационные и методы понижения порядка (редукции) проблемы.

В основе большинства методов, как первой, так и второй группы лежит процедура метода Рэлея — Ритца (Rayleigh — Ritz) [9], идея которого заключается в построении аппроксимации инвариантного подпространства СВ. Ортогональные проекции матриц исходной системы уравнений (5) на это подпространство приводят к редуцированной системе уравнений:

$$\left[T^T K T\right]\{Ts\} = \gamma^2 \left[T^T M T\right], \tag{8}$$

где $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$ — матрица, задающая базис подпространства СВ, близкого к инвариантному; γ — числа Ритца, s — вектор Ритца.

$\left[T^T K T\right]$ и $\left[T^T M T\right]$ являются проекциями на это подпространство (матрицы Рэлея); p — размер подпространства ($p \ll n$).

В случае если подпространство СВ инвариантно, то каждое СЗ задачи (8) является также и СЗ исходной задачи (5), а каждый СВ (8) определяется посредством следующего соотношения:

$$\varphi_i = Ts_i. \tag{9}$$

С вычислительной точки зрения важным здесь является то, что система уравнений (8) обладает уже меньшей размерностью по сравнению с (5) и может быть эффективно решена с применением традиционных методов.

На практике для симметричных систем инвариантное подпространство бывает известно очень редко. Его поиск, вообще говоря, равносилен решению проблемы СЗ. Поэтому строится подпространство, близкое к инвариантному. В этом случае числа Ритца являются приближениями к СЗ, а векторы Ритца есть соответствующие приближения к СВ задачи (8). Степень приближения СЗ и СВ напрямую зависит от того, насколько удачно удается построить базисные векторы из T.

Предлагаемые многими авторами различные способы построения базиса подпространства СВ и образуют многообразие методов решения проблемы СЗ и СВ высокого порядка.

Некоторые итерационные методы построены на многократном применении процедуры Рэлея — Ритца до достижения сходимости. Итерации организуются либо с целью уточнения базиса подпространства T, либо с целью его расширения и, соответственно, увеличения размера подпространства. Метод итерирования подпространств построен первым способом, метод Ланцоша — вторым.

Методы понижения порядка находят аппроксимацию базиса, используя зависимость исключаемых переменных от основных в (5).

Итерационные методы позволяют находить СЗ, используя последовательность однотипных вычислений, приводящих к интересующим значениям. Их достоинство заключается в том, что они позволяют найти искомые СЗ и СВ с любой наперед заданной степенью точности.

Следует отметить, что в силу высоких порядков матриц традиционные итерационные методы [3—9] для решения проблемы СЗ оказываются неэффективными, поэтому для решения больших задач используются методы, учитывающие разреженность и симметричность матриц. Это означает, что все численные операции производятся над ненулевыми элементами матриц, хранящимися в памяти ЭВМ в компактной форме. Именно это и позволяет данным методам решать системы уравнений высокого порядка.

Но даже методы, специально разработанные для решения проблемы СЗ высокого порядка, оказываются неустойчивыми к плохо обусловленным задачам. Это приводит к резкому ухудшению их сходимости. Исследования многих авторов направлены на разработку различных модификаций, позволяющих тем или иным способом повысить скорость сходимости и эффективность данных методов.

Метод итераций в подпространстве был разработан Батэ и Вилсоном [10] и представляет собой комбинацию метода обратной итерации [9] и метода Релея — Ритца [9] для последовательного вычисления p-мерного подпространства СВ. Метод можно понимать, как систематическое применение метода Ритца, в котором приближения СВ используются для формирования векторов нагрузок текущей итерации. Сходимость метода существенно зависит от того, насколько удачно удается выбрать начальное подпространство векторов. В [9] предлагается выбирать начальные векторы так, чтобы они включали в себя степени свободы, соответствующие большим массам и малым жесткостям. Также важным моментом реализации метода является выбор размера итерируемого подпространства. Малый размер подпространства приведет к медленной сходимости метода, слишком большой — к неоправданным вычислительным затратам. Оптимальный размер определяется структурой спектра матрицы жесткости, обычно неизвестной заранее. Поэтому успешный выбор размера во многом определяется наличием дополнительной информации, а также интуицией и опытом исследователя. Практический опыт использования этого метода [11] показал ряд его недостатков: снижение скорости сходимости по мере увеличения номера итерируемого СВ, значительное увеличение вычислительных затрат, требуемых для решения проблемы СЗ и СВ подпространства в том случае, когда необходимо вычислять большее число собственных пар, пропуск СВ по причине плохого выбора начальных векторов. Для преодоления указанных недостатков многими авторами были разработаны соответствующие модификации, которые включают: итерации в блоке постоянного размера с немедленным исключением сходящихся векторов [12], применение полиномов Чебышева [13], использование сдвигов [14, 15], сдвиги в случае кратности СЗ [16], рафинирование векторов Ритца [17], улучшенные стратегии выбора начальных векторов [18], применение процедуры Релея — Ритца только на определенных итерационных шагах [19], суперэлементные формулировки метода [20—22].

Метод итерирования подпространства приемлем для решения больших задач и успешно применялся специалистами в различных областях науки и техники, однако с появлением метода Ланцоша [23], который практически во всех ситуациях эффективнее, он отошел на второй план.

Метод Ланцоша получается в том случае, когда аппроксимации Рэлея — Ритца применяются к последовательности вложенных подпространств Крылова. На каждом шаге алгоритма базис подпространства Крылова дополняется новым вектором, представленным в виде линейной комбинации к уже вычисленным векторам. В работах Каниэля, Сада [24, 25] теоретически доказано, что сходимость подпространства Крылова к инвариантному достигается с увеличением его размера. Замечательной особенностью подпространства Крылова является трехдиагональность ортогональных проекции на него матриц K и M, что позволяет построить систему (8) не явно, а используя трехчленные рекуррентные соотношения, а также находить собственные пары (8) достаточно эффективно. Анализ сходимости метода, проведенный Каниэлем и Садом [24, 25], показал, что метод Ланцоша сходится быстрее метода итерирования подпространств даже в том случае, когда последний использует чебышевское ускорение.

Однако на практике алгоритм Ланцоша ведет себя иначе, чем в теории. Ошибки округления разрушают ортогональность векторов из базиса подпространства Крылова, что приводит к сходимости вычисленных пар Ритца к уже полученным ранее собственным парам. Поскольку явление потери ортогональности векторами Ланцоша довольно долгое время не имело внятного объяснения, в качестве действенного средства была предложена ортогонализация итерируемого вектора на каждом шаге ко всем ранее вычисленным векторам. Проблема, таким образом, разрешается, однако привлекательность алгоритма падает прямо пропорционально возросшим затратам на ортогонализацию. Тщательное исследование этой проблемы, выполненное в работах Парлетта, Пэйджа и Скотта [26—28], в дальнейшем позволило предложить более экономичные способы поддержания ортогональности базиса Ланцоша на необходимом уровне: выборочную [29] и частичную ортогонализацию [30]. Практический опыт автора [31] показал, что выборочная ортогонализация, основанная на теореме Пэйджа, эффективна только для относительно небольшого числа вычисляемых СВ. Частичная ортогонализация, напротив, позволяет поддерживать ортогональность базиса для большего количества векторов (300…700 и более). Также известны блочные версии алгоритма [31—35], в которых итерации выполняются не для одного вектора, а сразу для группы векторов. Проекции исходных матриц в этом случае имеют блочно-трехдиагональную форму. Блочная версия позволяет организовать высокопроизводительные вычисления за счет меньшего количества кэш-промахов и решения треугольных линейных систем сразу с несколькими правыми частями. Также оценки скорости сходимости становятся лучше, чем для простого алгоритма. Преимущества блочного алгоритма Ланцоша перед исходной версией во многих отношениях аналогичны преимуществам одновременных итераций перед простыми векторными итерациями. Этот результат, справедливый в предположении, что все вычисления выполняются точно, был получен Садом [25]. Наиболее совершенной и практически используемой версией сейчас является блочный алгоритм Ланцоша со спектральными трансформациями [35], разработанный в центре исследований NASA.

Использование спектральных трансформаций (сдвигов) является одной из наиболее часто используемых модификаций для ускорения сходимости итерационных процессов. Сдвиги позволяют разделить длинный частотный интервал на несколько коротких подинтервалов. При этом на каждом частотном подинтервале решается своя задача на СЗ, не связанная с решением на других частотных интервалах. «В методе Ланцоша со сдвигами количество векторов в базисе остается ограниченным и небольшим, тем самым экспоненциальный рост вычислительной работы при возрастании количества требуемых собственных пар заменяется квазилинейным» [31]. В соответствии с этим уравнение (5) переписывается в виде:

$$(K-\sigma M)\varphi=\left(\omega^2-\sigma\right)M\varphi, \tag{10}$$

где σ — величина сдвига, выбираемая как наилучшее приближение к итерируемому СЗ.

Тогда на каждом шаге метода решается система линейных алгебраических уравнений с правой частью:

$$K_\sigma\varphi=M\varphi_0. \tag{11}$$

«Плата» за это — необходимость многократного разложения «сдвинутой» матрицы жесткости:

$$K_\sigma=K-\sigma M=LL^T \tag{12}$$

и последующего решения треугольных систем уравнений:

$$Ly=M\varphi_0,\ L^T\varphi=y. \tag{13}$$

Поэтому большое значение имеет использование эффективного метода для факторизации матрицы жесткости K_σ. Для факторизации матриц высоких порядков обычно используют методы подконструкций или мультифронтальные методы [36, 37].

Методы итерации в подпространстве и метод Ланцоша получили широкое распространение и реализацию практически во всех современных МКЭ-комплексах. Авторы [38] представляют сопоставление методов для решения большеразмерных задач строительной механики (расчетные модели от 40 тыс. до 8 млн степеней свободы), реализованных в отечественном программном комплексе *STARK ES*. Для решения задач на СЗ в сравнении участвовали метод итерирования подпространства в сочетании с методом подконструкций для факторизации матрицы жесткости и блочный метод Ланцоша в сочетании с мультифронтальным методом. Анализ результатов расчета показал практически тотальное преимущество метода Ланцоша и квазилинейную сходимость при увеличении числа вычисляемых собственных пар.

С. Ю. Фиалко — автор решателей МКЭ-уравнений программных комплексов *SCAD* и *Robot Millenium* — также приводит в [31] результаты численных экспериментов над задачами строительной механики высокой размерности. В сравнении участвовали метод итерирования подпространства, блочный метод итерирования подпространства, стандартный метод Ланцоша, блочный метод Ланцоша со сдвигами. Последний оказался наиболее эффективным методом при нахождении собственных пар для многоэтажного здания, модель которого включала 115 тыс. степеней свободы. При увеличении числа требуемых собственных пар блочный метод Ланцоша со сдвигами оказался единственно возможным вариантом решения задачи.

Применение блочного метода Ланцоша со сдвигами для решения сверхбольших задач (свыше 1 млн степеней свободы) приводит к затратной многократной процедуре факторизации матрицы жесткости (12) а также последующему решению треугольных систем уравнений с этой матрицей (13). Блочный мультифронтальный метод [37] для факторизации матриц позволяет значительно сгладить эту проблему, но не является единственным решением.

Используются различные способы обхода дорогостоящей факторизации матрицы жесткости и прямой/обратной подстановки. Например, в [39] предложен метод Ланцоша, основанный на итерационном решении системы уравнений (11). В [40] представлен метод Давидсона, в котором в процедуре итераций обратной матрицей со сдвигом точное решение системы уравнений заменено приближенным итерационным. Главная идея таких подходов основана на том, что для больших задач может оказаться эффективнее применять высокопроизводительный итерационный метод к решению (11), чем выполнять прямые и обратные подстановки прямого метода (13) [2].

Другим способом избежать факторизации матрицы жесткости является разработка итерационных градиентных методов, основанных на минимизации частного Рэлея [2, 41—45]:

$$R\left(x_k\right)=\frac{\left(Kx_k,x_k\right)}{\left(Mx_k,x_k\right)}, \tag{14}$$

где x_k — аппроксимация собственного вектора на k-м шаге итерации. Процедура линейного поиска [41] сводит процедуру минимизации функционала (14) к решению однопараметрической задачи на каждом шаге итерации

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k = \frac{2}{\left(Mx_k, x_k\right)}\left(Kx_k - \lambda_k Mx_k\right), \tag{15}$$

где α_k — параметр минимизации, g_k — вектор градиентного спуска.

Метод сопряженных градиентов [42] строит последовательность направлений градиентного спуска. Преимущество метода заключается в том, что достаточно только задавать процедуру умножения матрицы на вектор и векторные операции, что эффективно реализуется в случае разреженных матриц. Сходимость метода проверяется по вектору невязки и наперед заданному параметру точности.

Плохая обусловленность практических задач строительной механики приводит к резкому замедлению сходимости большинства итерационных методов, включая и градиентные. Из-за ошибок округлений вычисления вектора невязок, начиная с некоторой итерации, не выполняются с необходимой точностью. Сходимость метода замедляется в разы. В [2] показано, что метод сопряженных градиентов имеет высокую сходимость по верхней части спектра СЗ, но медленно сходится к младшим СЗ в случае плохо обусловленных задач. В некоторых практических случаях наблюдается эффект запирания сходимости на низших СЗ [2]. Эффективным способом борьбы с медленной сходимостью является процедура предобуславливания, которая заключается к переходе от плохо обусловленной системы (5) к системе с лучшей обусловленностью:

$$\left[A - \omega^2 C\right]\left\{\varphi\right\} = 0, \tag{16}$$

где $A = B^{-1}K$, $C = B^{-1}M$, B — матрица-предобуславливатель.

В этом случае сходимость задачи (16) будет быстрее, чем сходимость задачи (5), так как число обусловленности ($B^{-1}K$)<числа обусловленности (K). При этом B выбирают таким образом, чтобы она была «хорошей» аппроксимацией K. На практике матрицы A и C не вычисляются, а используется неявный алгоритм в методе сопряженных градиентов [2, 41]. Также одно из требований — это простота и экономичность построения B. Построение предобуславливателя является сложной и нетривиальной задачей. Не существуют универсального подхода, и на практике применяют различные эвристические методы. Наиболее эффективными на данный момент является класс предобуславливателей, построенных на основе неполных факторизаций Холецкого (ICCG) [46—51] и многоуровневые предобуславливатели [2, 40, 45, 52—58]. «Методы ICCG основаны на том, что если в качестве оператора предобуславливания взять саму матрицу системы уравнений и факторизовать ее, то сходимость к точному решению обеспечивается за первую итерацию» [2]. Стоимость такого решения эквивалентна прямому методу. Поэтому главная идея — использовать в качестве предобуславливания неполностью факторизованную матрицу:

$$B \approx LL^T. \tag{17}$$

Наиболее простой способ [46] — сохранять при факторизации только те элементы, которые соответствуют ненулевым элементам исходной матрицы системы (IC(0) с нулевым заполнением). Другой способ [47] заключается в отбрасывании малозначимых для разложения элементов по порогу IC(t). Но не тот, ни другой способ не гарантирует устойчивость разложения для всех классов положительно определенных матриц. Поэтому на практике обычно проводят контроль положительной определенности матрицы в процессе разложения, корректируя главную диагональ при удалении элементов [48—51]. Существует вариант разложения [50], позволяющий приближать B к K не за счет увеличения количества элементов в L, а за счет увеличения их качества. Это достигается путем двойной фильтрации элементов и разделения их на два порядка точности. В результате получается эффективный предобуславливатель с высокой степенью аппроксимации при небольших затратах памяти [50]. В работах [59—63] продолжается разработка блочно-разреженных предобуславливателей для массивно-параллельных архитектур современных компьютеров, позволяющих решать задачи сверхвысокого порядка (до 18 млн степеней свободы).

Идея многоуровневых (многосеточных) предобуславливателей [2, 40, 45, 52—58] основана том, что модель грубого уровня должна предсказать решение по медленно сходящимся нижним тонам колебаний, а сходимость по высоким тонам будет обеспечена при сглаживании — процедуре, состоящей в подавлении быстро осциллирующих компонент резидуального вектора, возникающих после пролонгирования — отображения решения модели грубого уровня на исходную модель МКЭ. По способу построения модели грубого уровня методы делятся на геометрические, алгебраические и механические (агрегатные) [32].

Расчеты, выполненные в [2, 62], показывают высокую эффективность метода сопряженных градиентов как с многоуровневым агрегатным предобуславливанием, так и с IC-предобуславливателем. В многих практических задачах данный подход оказался намного эффективнее блочного метода Ланцоша со сдвигами [2].

До сих пор речь шла об итерационных методах решения неполной алгебраической проблемы на СЗ, то есть методах, которые позволяют определять несколько первых собственных пар с заданной наперед точностью. К другой группе методов относятся различные реализации метода Ритца, в которых точность решения определяется видом и количеством заданных базисных векторов. Часто в инженерной практике не требуется определять собственные пары с высокой точностью. Достаточно только оценить собственные частоты нижней части спектра. Данные методы позволяют получить приближенные значения для нескольких первых форм и частот, если пользователь имеет о них какую-либо информацию. Для получения редуцированной системы методы требуют задания главных степеней свободы («master dofs»). То есть, можно контролировать процесс создания редуцированной модели. Далее исключаются второстепенные степени свободы («slave dofs»). Это позволяет преобразовать первоначально сложную исходную задачу с большим числом степеней свободы к редуцированному виду со сравнительно малым числом степеней свободы.

Опыт динамического расчета показывает [2, 64], что можно решить этим методом некоторые задачи, которые при использовании автоматических методов редукции (имеются в виду методы итерирования подпространств и Ланцоша) приводят к очень сложным вычислительным процессам. Например, отыскание местных форм колебаний отдельных стержней приводит при использовании этих методов к серьезным проблемам, поскольку в процессе расчета все собственные частоты и формы разыскиваются автоматически без какого-либо выбора. Это нужно принимать во внимание в большинстве нагружений в реальных конструкциях. Следует заметить, что в большинстве случаев в реальных конструкциях эти местные вибрации ограничены связями, которые не принимаются в расчет в модели МКЭ, и их вклад в общее движение системы будет несущественным. Как правило, вклад масс таких местных вибраций очень мал. Использование точных методов в этом случае приведет к немыслимым трудностям. Однако как приближенный метод редукции метод может значительно упростить вычислительный процесс [64].

Запишем обобщенный случай методов редукции применительно к обобщенной проблеме СЗ и СВ (5). В соответствии с разделением всех степеней свободы на главные и второстепенные (5) можно представить в блочном виде:

$$\left(\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{mm} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \varphi_m \\ \varphi_s \end{Bmatrix} = 0, \tag{18}$$

где индексы m и s соответствуют главным и второстепенным степеням свободы. $\lambda = \omega^2$. В развернутом виде (18) может быть записано:

$$\begin{aligned} (K_{mm} - \lambda M_{mm})\varphi_m + (K_{ms} - \lambda M_{ms})\varphi_s = 0, \\ (K_{sm} - \lambda M_{sm})\varphi_m + (K_{ss} - \lambda M_{ss})\varphi_s = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда зависимость второстепенных неизвестных от главных может быть получена из второго уравнения системы (19):

$$\varphi_s = R(\lambda)\varphi_m, \tag{20}$$

где $R(\lambda)$ называется матрицей динамической редукции и определяется как:

$$R(\lambda) = -(K_{ss} - \lambda M_{ss})^{-1}(K_{sm} - \lambda M_{sm}). \tag{21}$$

Тогда, в соответствии с (9), полный вектор перемещений представляется в виде

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_m \\ \varphi_s \end{bmatrix} = [T]\varphi_m = \begin{bmatrix} I \\ R(\lambda) \end{bmatrix}\varphi_m, \tag{22}$$

где [T] — матрица преобразования координат, задающая базис подпространства, I — единичная матрица порядка m.

Выполнив обратную подстановку (20) во второе уравнение (19), получим обобщенную редуцированную проблему СЗ и СВ:

$$D_R(\lambda)\varphi_m = 0, \qquad (23)$$

где редуцированная динамическая матрица жесткости $D_R(\lambda)$ определяется как:

$$D_R(\lambda) = (K_{mm} - \lambda M_{mm}) - (K_{ms} - \lambda M_{ss})\left(K_{ss} - \lambda M_{ss}^{-1}\right)\left(K_{sm} - \lambda M_{sm}\right). \qquad (24)$$

Альтернативный способ получения редуцированных уравнений заключается в проецировании матриц исходной системы уравнений на подпространство, заданное координатной трансформацией:

$$\left[K_R - \lambda M_R\right]\varphi_m = 0, \qquad (25)$$

где редуцированные матрицы жесткости и масс:

$$\begin{aligned} M_R &= [T]^T[M][T] = M_{mm} + M_{ms}R(\lambda) + R^T(\lambda)M_{sm} + R^T(\lambda)M_{ss}R(\lambda), \\ K_R &= [T]^T[K][T] = K_{mm} + K_{ms}R(\lambda) + R^T(\lambda)K_{sm} + R^T(\lambda)K_{ss}R(\lambda). \end{aligned} \qquad (26)$$

Формы редуцированных уравнений (23), (25) являются частотно-зависимыми. Так как инерционные силы второстепенных степеней свободы полностью учитываются при построении редуцированной системы, то можно говорить, что редукция выполняется точно. Для выполнения точной редукции существует соответствующий метод, предложенный Люнгом в [65]. Также на практике используются различные подходы как приближенного вычисления динамической матрицы жесткости (24), так и приближенного формирования матрицы преобразования координат (22).

В зависимости от степени пренебрежения динамическими свойствами конструкции во второстепенных степенях свободы выделяют несколько форм процесса редукции: статическая (полное пренебрежение) и динамическая (полный или частичный учет).

В монографии [66] выполнена классификация и проведен детальный обзор большинства существующих методов редуцирования. В соответствии с ним различные подходы к построению координатной трансформации (22) можно классифицировать как: редукция физических координат, модальная редукция, смешанная редукция, получаемая объединением первых двух вариантов.

В методах редукции физических координат редуцированная модель получается путем исключения части физических координат исходной модели. Для вычисления редуцированной модели используются только преобразования с матрицами исходной системы уравнений. В вычислительном плане этот тип редукции наиболее экономичен. Редуцированная модель обычно обладает неплохим качеством, однако точность вычисляемых СЗ сильно зависит от выбора главных степеней свободы и их количества. Статическая конденсация Гайана и его модификации, точная и классическая динамическая конденсация, IRS и итерационные методы динамической конденсации являются методами редукции физических координат [66].

Метод исключения второстепенных степеней свободы был впервые предложен Гайаном в 1965 г. [67]. Так как инерционные характеристики второстепенных степеней свободы полностью игнорируются, то метод часто называют статической конденсацией. С конца 1960-х гг. метод широко использовался для решения многих статических и динамических задач. Сегодня этот метод все еще остается весьма популярным и используется во многих методах динамической конденсации. Игнорирование сил инерции выполняется путем задания $\lambda = 0$ в матрице точной динамической редукции (21). Тогда матрица преобразования координат представляется в виде:

$$T_G = \begin{bmatrix} I \\ R_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1} K_{sm} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

А редуцированные матрицы жесткости и масс получаются из (26):

$$\begin{aligned} K_G &= K_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm}, \\ M_G &= M_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} M_{sm} - M_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm} + K_{ms} K_{ss}^{-1} M_{ss} K_{ss}^{-1} K_{sm}. \end{aligned} \tag{28}$$

Метод является точным только в случае статических задач. Обобщение его на динамические задачи приводит к возникновению больших погрешностей вследствие полного пренебрежения инерционными силами во второстепенных степенях свободы. Метод используется в основном для исследования небольшого числа нижних тонов колебаний конструкций, так как только для них аппроксимация характера связи между главными и второстепенными степенями свободы, выраженная с помощью уравнений статики, близка к истинной. В [68] представлена методология, согласно которой для метода Гайана определен частотный диапазон [0, …, ω_c], только в пределах которого редукция дает близкие аппроксимации. В аннотации этой работы ω_c (частота среза) определяется как наименьшая частота модели конструкции, полученной при закреплении главных степеней свободы («slave model»):

$$(K_{ss} - \omega^2 M_{ss})\varphi_s = 0. \tag{29}$$

Понятно, что чем больше главных степеней свободы будет зафиксировано, тем выше будет значение ω_c и, соответственно, шире диапазон частот, в котором может быть применена редукция Гайана. Погрешность нахождения частот в редукции Гайана зависит от отношения ω_c/ω_i, где ω_i — интересующая частота. Понятно, что с увеличением номера вычисляемой частоты погрешность увеличивается.

Другой вариант статической конденсации можно получить, если в уравнении (18) пренебречь статическими силами по сравнению с силами инерции. В этом случае:

$$\varphi_s = -M_{ss}^{-1} M_{sm} \varphi_m, T_{MS} = \begin{bmatrix} I \\ -M_{ss}^{-1} M_{sm} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Этот подход имеет тот же недостаток, что и первый, — возможность возникновения большой погрешности. Комбинирование этих двух подходов, предложенное в [51], дает:

$$[T] = (1-a)[T_G] + a[T_{MS}]. \tag{31}$$

Расчеты, выполненные в [69] при a, меняющимся от 0 до 0,4, показали: чем выше значение a, тем точнее значение высоких частот и больше погрешность вычисления низких частот. Поэтому для низких частот Бенфилд рекомендует принимать $a = 0$, что соответствует редукции по Гайану.

В [66] рассматриваются две модификации метода, предложенные для улучшения точности. Метод обобщенной конденсации Гайана является комбинацией классического метода Гайана и обобщенного обращения матрицы жесткости. Рассматривая матрицу жесткости из (18) в блочно-столбцовом виде и пренебрегая инерционными составляющими в матрице масс, получим:

$$\left[K_m K_S\right]\begin{Bmatrix}\varphi_m \\ \varphi_s\end{Bmatrix} = 0, \left[K_m\right] = \begin{bmatrix}K_{mm} \\ K_{sm}\end{bmatrix}, \left[K_s\right] = \begin{bmatrix}K_{ms} \\ K_{ss}\end{bmatrix}. \quad (32)$$

Тогда связь между главными и второстепенными неизвестными получается в виде:

$$\bar{R}_G = -K_s^{+} K_m, \quad (33)$$

где индекс + обозначает обобщенное обращение матрицы и определяется как

$$K_S^{+} = (K_S^T K_S)^{-1} K_S^T = (K_{ss} K_{ss} + K_{sm} K_{ms})^{-1} K_S^T. \quad (34)$$

Выполняя преобразования над (33), в итоге получаем:

$$\begin{aligned} \bar{R}_G &= P(R_G K_{mm} + K_{sm}), \\ P &= K_{ss}^{-1}\left[I - R_G (I + R_G^T R_G)^{-1} R_G^T\right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Расчеты, выполненные в [66], показывают, что редуцированная модель, полученная по методу обобщенной статической конденсации, обладает большей точностью, однако требует гораздо большей вычислительной работы. Другой способ уточнения состоит в применении редукции Гайана к проблеме СЗ и СВ со сдвигом (10). Тогда соответствующая матрица трансформации координат имеет вид:

$$T(\sigma) = \begin{bmatrix} I \\ R(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -\left(K_{ss} - \sigma M_{ss}\right)^{-1}\left(K_{sm} - \sigma M_{sm}\right) \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Применение сдвигов несет две функции: улучшить точность редуцированной модели и приблизить редуцированную модель к полной модели на любом заданном частотном диапазоне. Если в качестве параметра сдвига выбирается точное СЗ, то формулировка (35) совпадает с формулировкой точной динамической конденсации (21), и редуцированная модель будет точно представлять полную модель на этой частоте. Если принять $\sigma = 0$, то (36) переходит в редукцию по Гайану. Метод получил название «квазистатическая конденсация» или «классическая динамическая конденсация». Расчеты в [66] показывают, что чем ближе СЗ к параметру сдвига, то тем выше точность его вычисления. Комбинацией обоих подходов является обобщенная квазистатическая конденсация, позволяющая получать еще более точные результаты [66], но требующая больших вычислительных затрат.

Другой модификацией редукции Гайана является предложенный В. А. Игнатьевым. и В. Н. Ромашкиным [70] метод сплайн-коллокационной конденсации, в котором зависимость между главными и второстепенными степенями, в пределах каждой рассматриваемой области конструкции, выражается в виде полинома 3-й степени. Преимущество подхода заключается в простоте построения матрицы преобразования координат (27), не требующей процедуры обращения блока второстепенных степеней свободы, имеющей высокий порядок. Также возможно выполнение независимой конденсации в каждой отдельной области. Сложность алгоритма заключается в необходимости обеспечения условия совместности деформаций и перемещений на границах сплайнов, что требует учета всех особенностей КЭМ.

Формулировка точной динамической конденсации представлена в [65]. В соответствии с теоремой Люнга следующее уравнение может быть использовано для точного вычисления редуцированных матриц, получаемых из динамической матрицы жесткости:

$$M_R(\lambda) = -\frac{\partial D_R(\lambda)}{\partial \lambda}, \; K_R(\lambda) = D_R(\lambda) - \lambda \frac{\partial D_R(\lambda)}{\partial \lambda}. \tag{37}$$

Подставляя (24) в (37) и дифференцируя по λ, в итоге получаем:

$$\begin{aligned} K_R(\lambda) &= K_{mm} - K_{ms} D_{ss}^{-1} D_{sm} - D_{ms} D_{ss}^{-1} K_{sm} + D_{ms} D_{ss}^{-1} K_{ss} D_{ss}^{-1} D_{sm}, \\ M_R(\lambda) &= M_{mm} - M_{ms} D_{ss}^{-1} D_{sm} - D_{ms} D_{ss}^{-1} M_{sm} + D_{ms} D_{ss}^{-1} M_{ss} D_{ss}^{-1} D_{sm}, \end{aligned} \tag{38}$$

где $D_{ij} = K_{ij} - \lambda M_{ij}$ — соответствующий блок динамической матрицы жесткости.

Редуцированные матрицы жесткости и масс, полученные в (38), являются точными и частотно-зависимыми по аналогии с (26). Соответствующая редуцированная проблема СЗ и СВ является нелинейной по отношению к неизвестному СЗ. Для ее решения используется четыре основных подхода: методы линеаризации [71], пространства состояний, возмущений и прямых итераций [66]. Последний подход является комбинацией спектральных трансформаций и любого из классических итерационных методов для решения редуцированной проблемы СЗ и СВ. В [66] описано несколько подобных схем для последовательного итерационного вычисления (38). Методы требуют задания начального приближения к СЗ в (38) для выполнения последующих итераций. Обычно в качестве начального приближения задается нулевое СЗ. Тогда первая итерация метода соответствует редукции Гайана. Найденные СЗ редуцированной системы по Гайану используются далее для выполнения сдвига и последующих итераций. Процесс повторяется до достижения требуемой точности. Как показали расчеты, выполненные в [66], по причине плохой аппроксимации Гайана при увеличении номера итерируемого СЗ имеет место немонотонная сходимость с пропуском некоторых СЗ. Поэтому выбор начального приближения очень важен, особенно для задач с кратными или близкими СЗ в спектре. Для решения этой проблемы в [66] предлагается выбирать редукцию Гайана как начальное приближение только для первого СЗ. Начальное приближение для вычисления 2-го и последующих СЗ выбирается из решения редуцированной проблемы СЗ, полученной на предыдущем шаге алгоритма. С увеличением количества главных степеней свободы и применением данного подхода достигается быстрая и монотонная сходимость итерационного процесса [66].

В [66] также принята классификация, согласно которой методы динамической конденсации разделены на одношаговые, двухшаговые и многошаговые (итерационные). Большинство рассмотренных методов является одношаговыми в том смысле, что матрицы редуцированной модели определяются сразу. Особый вид одношаговой точной динамической конденсации был рассмотрен выше, где редуцированные матрицы являются частотно-зависимыми и требуются специальные подходы для их вычисления [66]. В двухшаговых методах результат, полученный на первом шаге, обычно рассматривается как начальное приближение. Обычно такой результат обладает высокой степенью погрешности. Коррекция выполняется на втором шаге, где могут быть использованы методы восстановления полных форм колебаний из их редуцированных компонент (mode expansion). Далее выполняется проекция исходных матриц на подпространство, построенное из этих уточненных форм. Итерационные подходы строятся как естественное продолжение двухшагового процесса. После того как редуцированная модель была получена на втором шаге, она используется как приближение для следующего шага. Такой процесс повторяется до достижения указанной точности. Достоинство этих подходов заключается в том, что выбор главных степеней свободы не оказывает влияния на результирующую точность вычислений, однако влияет на скорость сходимости итерационного процесса.

В 1989 г. Каллахан [72] предложил IRS-метод для улучшения точности редукции Гайана, который основывается на двухшаговой концепции динамической редукции. Эта работа дала важный толчок к разработке будущих итерационных методов динамической конденсации. В IRS-методе редуцированная модель, полученная по методу Гайана, используется в качестве оценки на первом шаге. На втором шаге выполняется подгонка, которая частично компенсирует инерционные силы, игнорируемые в методе Гайана. Переписав (28) в форме (3), получим:

$$\ddot{u}_m = -M_G^{-1} K_G u_m. \tag{39}$$

Двойная дифференциация обеих частей (20) по времени дает:

$$\ddot{u}_s = R_G \ddot{u}_m. \tag{40}$$

Подстановка (39) в (40) приводит:

$$\ddot{u}_s = -R_G M_G^{-1} K_G u_m. \tag{41}$$

Подстановка (27), (39) и (41) в 2-е уравнение (19), записанное в дифференциальной форме, дает:

$$R_{\text{IRS}} = K_{ss}^{-1}\left[\left(M_{sm} + M_{ss} R_G\right) M_G^{-1} K_G\right] + R_G. \tag{42}$$

Так как инерционные члены включаются в матрицу R_{IRS}, то точность обычно намного выше, чем в редукции Гайана.

Блеир и Камино [73] попытались использовать IRS в качестве оценки для последующего корректирующего шага. В соответствии с этим уравнение (39) переписывается в виде:

$$\ddot{u}_m = -M_{\mathrm{IRS}}^{-1} K_{\mathrm{IRS}} u_m. \tag{43}$$

Тогда (41) можно переписать как:

$$R_{blair} = K_{ss}^{-1} \left[\left(M_{sm} + M_{ss} R_G \right) M_{\mathrm{IRS}}^{-1} K_{\mathrm{IRS}} \right] + R_G. \tag{44}$$

Итерационная схема формируется из (44) в следующем виде:

$$R_{blair}^{(i)} = K_{ss}^{-1} \left[\left(M_{sm} + M_{ss} R_G \right) \left(M_R^{-1} \right)^{(i-1)} \left(K_R \right)^{(i-1)} \right] + R_G, \ \ i \geq 1. \tag{45}$$

Фришвелл и др. [74] развили IRS в итерационную процедуру для получения более точных результатов. Использование матрицы R_{IRS} вместо редукции Гайана R_G в (40) приводит к:

$$R_{\mathrm{IRS}}^{(i)} = K_{ss}^{-1} \left[\left(M_{sm} + M_{ss} R_{\mathrm{IRS}}^{(i-1)} \right) \left(M_R^{-1} \right)^{(i-1)} \left(K_R \right)^{(i-1)} \right] + R_G. \tag{46}$$

В [66] рассматриваются две итерационные схемы, построенные из разрешающих уравнений динамической конденсации:

$$\begin{cases} R^{(i)} = R_G + K_{ss}^{-1} \left[\left(M_{sm} + M_{ss} R^{(i-1)} \right) \Phi_{mm}^{(i-1)} (\Phi_{mm}^{(i-1)})^T K_R^{(i-1)} \right] \\ R^{(0)} = R_G = -K_{ss}^{-1} K_{sm} \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots); \tag{47}$$

$$\begin{cases} R^{(i)} = R_G + K_{ss}^{-1} \left[\left(M_{sm} + M_{ss} R^{(i-1)} \right) (M_{\mathrm{R}}^{(i-1)})^{-1} K_R^{(i-1)} \right] \\ R^{(0)} = R_G = -K_{ss}^{-1} K_{sm} \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{48}$$

За начальное приближение снова выбирается редукция по Гайану. Также видно, что, например, 1-я итерация в (48) эквивалентна IRS-редукции (41). Расчеты, выполненные в [66], показывают, что достигается монотонная сходимость низших тонов свободных колебаний. Выбор главных степеней свободы не так критичен, как в других методах редукции физических координат. Высокая скорость сходимости наблюдается только на нескольких первых итерациях, далее сходимость замедляется, особенно в случаях, когда редуцированная модель близка к полной модели только на определенном частотном диапазоне. Скорость сходимости может быть улучшена за счет использования обобщенной обратной формы уравнений, техники сдвигов и комбинации с методом итерирования подпространств [66].

Чия и Линь [75] предложили улучшение итерационной IRS-редукции, модифицировав матрицу итерационной трансформации и ускорив сходимость метода. Также связали полученную модификацию с методом итерации подпространства и привили доказательства сходимости. Численные расчеты показали, что сходимость полученной модификации при вычислении высших тонов колебаний, отличных от нескольких первых, наступает быстрее, чем в итерационной IRS-редукции.

Если только модальные параметры модели входят в матрицу динамической редукции, обычно такой подход называют динамической конденсацией модального типа. В группе таких методов редуцированная модель точно представляет полную модель на всех выбранных формах. Формы могут быть выбраны произвольно в любой части спектра частот. Точность такой редукции обеспечивается выбранными формами полной модели и не зависит от выбора главных степеней свободы. К недостаткам стоит отнести то, что формы должны быть вычислены перед выполнением редукции. В случае, когда число выбранных форм совпадает с числом главных степеней свободы и все формы отличны друг от друга, редуцированная модель будет обладать хорошем качеством. Однако вычисление достаточного количества форм исходной модели в случае высокого ее порядка уже считается сложной задачей.

По аналогии с (9) и (22) полный вектор перемещений физических координат может быть записан в виде разложения по собственным формам и выражен через модальные (обобщенные) координаты:

$$\varphi = [\Phi] q_k, \tag{49}$$

где Φ — матрица координатной трансформации, каждый столбец которой является собственным вектором или собственной формой (модальная матрица); q_k — вектор модальных (обобщенных) координат; k — количество выбранных форм (размер модального подпространства). Применяя координатную трансформацию (49) к исходной системе уравнений (5), получим:

$$[K_R - \lambda M_R] q_k = 0, \tag{50}$$

где K_R и M_R обычно называются модальными матрицами жесткости и масс соответственно и являются диагональными матрицами. Если матрица собственных векторов Φ нормализована по отношению к матрице масс, то модальная матрица масс и матрица жесткости становятся единичной и диагональной матрицей СЗ соответственно. Поэтому k уравнений в (50) не пересекаются в модальном подпространстве и могут быть рассмотрены как k моделей с одной степенью свободы. Эта процедура также известна как суперпозиция форм или модальная суперпозиция.

Как уже упоминалось выше, в качестве форм могут быть взяты собственные формы полной исходной модели. В этом случае редуцированная модель будет точно представлять полную модель в этих формах, но это требует также решения неполной проблемы СЗ и СВ. На самом деле не обязательно выбирать формы точно. Если известен вектор нагрузки, то в качестве хорошей аппроксимации собственных форм могут быть использованы векторы Ритца.

В [2] отмечается, что векторы Ритца при использовании удачного базиса оказываются даже более информативными, чем собственные векторы.

Этот факт и был использован автором программного комплекса Robot-Millenium С. Ю. Фиалко для разработки метода редукции. Базисные векторы определяются из решения задачи статики при приложении единичных сил в выбранных узлах модели МКЭ по направлениям желаемых степеней свободы динамической модели. Метод гораздо точнее, чем метод редукции Гайана, и в отличие от последнего сохраняет разреженную структуру матрицы, что принципиально для решения больших задач [2].

Другим методом, являющимся по сути методом Ритца, но использующим чисто итерационный способ генерации базисных векторов, является разработанный С. Ю. Фиалко Ритц-градиент метод [2]. Результаты численных экспериментов, проведенные в [2] над некоторыми большеразмерными задачами строительной механики, показали, что Ритц-градиент метод позволяет до 10 раз сократить время решения задачи по сравнению с блочным алгоритмом Ланцоша со сдвигами.

LDRV (Load-dependent Ritz Vectors) — частный класс векторов Ритца, в которых информация о нагрузке используется для генерации векторов. В LDRV-методе первый Ритц-вектор получается из статического решения системы уравнений (1) с приложенной нагрузкой. Следующие векторы вычисляются, используя процедуры обратной итерации и ортогонализации по Грамму — Шмиту. Понятно, что векторы Ритца должны быть сгенерированы заново для каждого нового вектора нагрузки. Поэтому редуцированная модель, полученная ритц-трансформацией, является зависимой от схемы нагружения. Использование различных схем нагружений будет приводить к различным редуцированным моделям. Это является недостатком LDRV-метода. Как считается, метод был предложен Вилсоном, Яном и Диккенсом [76] и улучшен в работах [77], [78] за счет статически-возвращающихся процедур («static recurrence»).

Рассматривая модальную матрицу Φ из (49) в блочном виде в соответствии с разделением на главные и второстепенные степенями свободы, запишем:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_m \\ \varphi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{m\cdot k} \\ \Phi_{s\cdot k} \end{pmatrix} q. \tag{51}$$

Из первого уравнения системы (51) можно выразить модальные координаты через физические координаты главных степеней свободы. Применив операцию обобщенного обращения прямоугольной матрицы, получим следующее выражение:

$$q = \Phi^{+}_{k\cdot m}\varphi_m = (\Phi^{T}_{k\cdot m}\Phi_{m\cdot k})^{-1}\Phi^{T}_{k\cdot m}\varphi_m. \tag{52}$$

Подставляя это выражение обратно в (51), получим формулу для выражения полного вектора:

$$\varphi = T_{SEREP}\varphi_m = \begin{bmatrix} \Phi_{m\cdot k} & \Phi^{+}_{k\cdot m} \\ \Phi_{s\cdot k} & \Phi^{+}_{k\cdot m} \end{bmatrix} \varphi_m. \tag{53}$$

Применение данной модальной трансформации к исходной системе уравнений (5) и учет специфической природы подпространства T_{serep} приводит к следующей редуцированной системе уравнений:

$$[K_{\text{SEREP}} - \lambda M_{\text{SEREP}}]q = 0, K_{\text{SEREP}} = \Phi_{k\cdot m}^T \Phi_{k\cdot m}; M_{\text{SEREP}} = \Phi_{k\cdot m}^T \Lambda_{k\cdot k} \Phi_{k\cdot m}, \qquad (54)$$

где $\Lambda_{k\cdot k}$ — диагональная матрица СЗ, соответствующим выбранным формам.

Данный подход к получению редуцированной системы уравнений известен как SEREP (System Equivalent Reduction Expansion Process) и был предложен Каллаханом в [79].

Похожую формулировку матрицы модальной трансформации можно встретить в работе Камера [80]:

$$\varphi = \begin{bmatrix} I \\ \Phi_{s\cdot k} \Phi_{m\cdot k}^{+} \end{bmatrix} \varphi_m. \qquad (55a)$$

Данные методы получили свое применение в тест-анализе моделей и в методах восстановления полных форм. Один из недостатков этих методов также заключается в том, что в случае, когда число выбранных форм меньше (или больше, что реже) числа главных степеней свободы, то получаемая система имеет неполный ранг. Для выполнения последующего анализа требуется специальная схема для исключения модальных координат.

В случае, когда число выбранных форм совпадает с числом главных степеней свободы, то модальная матрица Φ_{mm}, составленная из компонентов СВ, относящихся к главным степеням свободы, обладает полным рангом, не сингулярна и обращаема. В этом случае:

$$\varphi = \begin{bmatrix} I \\ \Phi_{sm} \Phi_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \varphi_m. \qquad (55b)$$

Энергетический вариант частотно-динамической конденсации, предложенный В. А. Игнатьевым в [81—84], также является методом модальной редукции и содержит формулировку, аналогичную (55b), но предлагает более экономичный способ получения редуцированной модели за счет последовательного рассмотрения и конденсации парциальных систем небольшого порядка.

Если в трансформации участвуют как физические, так и модальные параметры, то такая редукция называется смешанной. Один из наиболее популярных вариантов смешанной редукции получается, если перемещения второстепенных степеней свободы представить в виде суммы их статических перемещений, вызванных перемещениями главных степеней свободы и перемещений, выраженных в виде разложения по собственным формам, полученным при закреплении главных степеней свободы:

$$\varphi_s = R_G \varphi_m + \Phi q_k. \qquad (56)$$

Тогда полный вектор перемещений представляется в виде:

$$\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_m \\ \varphi_s \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varphi_m \\ q_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R_G & \Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_m \\ q_k \end{Bmatrix}. \qquad (57)$$

Подставляя (57) в (18) и преумножив на T^T, в результате получим следующую систему уравнений:

$$\left(\begin{bmatrix} K_G & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_G & G \\ G^T & I \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \varphi_m \\ q_k \end{Bmatrix} = 0, \tag{58}$$

в ней:

$$G = M_{ms}\Phi - K_{ms}\Phi\Lambda^{-1} \tag{59}$$

выражает динамическую связь между второстепенными и главными степенями свободы.

Модальная матрица Φ определяется из решения проблемы СЗ для системы с закрепленными главными степенями свободы (29). Часто требуется исключать модальные координаты. Выражение модальных координат через физические следует из 2-го уравнения системы (58):

$$q_k = \lambda\left(\Lambda - \lambda I\right)^{-1} G^T \varphi_m. \tag{60}$$

Обратная подстановка (60) в (58) приводит к следующему окончательному отношению:

$$\varphi_s = \left[R_G + \lambda\Phi\left(\Lambda - \lambda I\right)^{-1} G^T\right]\varphi_m. \tag{61}$$

Тогда соответствующая редуцированная проблема СЗ определяется как:

$$\left[K_G - \lambda(M_G + \Delta M)\right]\varphi_m = 0, \tag{62}$$

где

$$\Delta M = \lambda G(\Lambda - \lambda I)^{-1} G \tag{63}$$

представляет собой матрицу коррекционных добавок к массам, которые вносят исключаемые степени свободы. «Редуцированная проблема СЗ в (62) является частотно-зависимой, и требуются специальные подходы для ее вычисления» [66].

В [66] также приводятся и другие виды смешанной редукции, такие как:

обобщенная динамическая редукция:

$$\varphi_s = R_G\varphi_m + (\Phi_{sk} + K_{ss}^{-1}K_{sm}\Phi_{\mathrm{mk}})q_k; \tag{64}$$

редукция с использованием пространства всех форм:

$$\varphi_s = (\Phi_{sm} + \Phi_{ss}\bar{R}_G)\left(\Phi_{mm} + \Phi_{ms}\bar{R}_G\right)^{-1}\varphi_m; \tag{65}$$

редукция с комбинацией метода Гайна и векторов Ритца:

$$\varphi_s = R_G\varphi_m + Yq_k. \tag{66}$$

В целом методы редукции смешанного типа позволяют находить СЗ с большей точностью, чем методы предыдущих двух групп. Точность в основном определяется количеством модальных параметров (выбранных форм), включенных в трансформацию. Чем больше форм будет удержано, тем лучше редуцированная модель будет представлять исходную модель в нужной части спектра. Но и стоимость трансформации возрастает в разы с расширением модального подпространства.

В работе Коутсовасиллиса [85] также выполнен обширный обзор литературы, посвященной редукционным методам, применяемым в машиностроении и динамике связанных жестких и упругих многотельных конструкций. В соответствии с принятой там классификацией редукционные подходы также разделены на три категории:

1. Методы редуцирования подпространства физических координат. В этом случае все множество степеней свободы редуцированной модели принадлежит физическому подпространству, т. е. описывается физическими координатами. В эту категорию попадают: редукция Гайана и ее модификации, точная динамическая конденсация, IRS и его модификации, SEREP, а также двухшаговые методы SEREP-IRS и SEREP-Гайан.

2. Методы редуцирования подпространства смешанных координат. В этом случае одна часть редуцированного вектора содержит физические координаты, вторая часть состоит из не-физических (модальных) координат. В эту категорию попадают описанные выше схемы смешанной редукции. Также рассматриваются дополнительные модификации;

Редукция с использованием векторов из подпространства Крылова:

$$\varphi_s = R_G \varphi_m + \Phi_{\text{krylov}} q_k;$$
$$\Phi_{\text{krylov}} = \text{span}\left\{ \underbrace{K_{ss}^{-1} b_s}_{\Phi^1_{\text{krylov}}}, \underbrace{\left(K_{ss}^{-1} M_{ss}\right) K_{ss}^{-1} b_s}_{\Phi^2_{\text{krylov}}}, \ldots, \underbrace{\left(K_{ss}^{-1} M_{ss}\right)^{q-1} K_{ss}^{-1} b_s}_{\Phi^q_{\text{kryloc}}} \right\}. \tag{67}$$

В [85] отмечается, что редуцированные модели, полученные из (56) и (67) формулировок, обладают почти схожими динамическими свойствами, по крайней мере в нижней части спектра частот. Основное преимущество использования векторов из подпространства Крылова перед собственными векторами заключается в меньшей зависимости от мест расположения главных степеней свободы.

Для улучшения точности редукции при удержании небольшой размерности модального подпространства в [85] рассматривается модификация, в которой редукция Гайана заменена IRS-редукцией:

$$\varphi_s = R_{\text{IRS}} \varphi_m + \Phi q_k. \tag{68}$$

При этом может быть использован как обычный, так и итерационный вариант IRS-метода. Такая же идея может быть использована и для случая, когда в качестве модальных координат выбирают координаты Крылова:

$$\varphi_s = R_{\text{IRS}} \varphi_m + \Phi_{\text{krylov}} q_k. \tag{69}$$

Также в эту категорию попадает двухшаговый подход, в котором на первом шаге используется SEREP-редукция, а корректирующий шаг выполняется с помощью (56), (67), (68) или (69).

3. К третьей категории относится группа редукционных методов, пришедших из теории систем контроля и применяемых в линейных инвариант-

ных во времени системах дифференциальных уравнений (системах обработки сигналов). В соответствии с этими подходами редуцированная система получается на основе сопоставления определенных параметров и исключения особых состояний, которые не так важны. Редукционные методы, относящиеся к этой области, разделяются на методы на основе Pade-аппроксимаций и связанно-сбалансированного отсечения («balancing-related truncation»).

Результаты численных экспериментов, проведенные над несколькими твердотельными, механическими КЭ-моделями в [85] показывают, что наиболее близкое соответствие критериям качества редуцированной модели и времени, затраченном на ее построение, отвечают SEREP, KSM и их двухшаговые варианты.

Эффективное понижение порядка системы уравнений кроме получения качественной редуцированной модели должно быть также экономичным в использовании ресурсов ЭВМ. Время, затраченное на выполнение редукции по описанным выше методам, может превысить все их достоинства в случае систем с большим числом степеней свободы. Как правило, при редуцировании большая часть степеней свободы подлежит исключению (80…90 % от общего числа). Это приводит к необходимости выполнять большое число арифметических операцией и операций перемещения данных над блоками второстепенных степеней свободы, которые оказываются также высокого порядка. Один из способов решения этой проблемы заключается в применении метода подконструкций (или суперэлементов) в физической интерпретации или блочного подхода на уровне системы алгебраических уравнений.

Метод подконструкций является широко применяемым инженерным методом для анализа сложных конструкций высокой размерности.

Метод редукции в этом случае применяется как внутренняя процедура исключения второстепенных степеней свобод в каждой из подконструкций перед их сборкой. В общем классическом случае для реализации данного подхода требуется выполнить четыре основных шага:

1) разделить исходную расчетную модель на несколько подконструкций, связанных в граничных узлах;

2) сформировать для каждой из подконструкций полную КЭ-модель;

3) построить для каждой из подконструкций редуцированную модель, применив редукционный метод;

4) получить конечную модель путем сборки редуцированных моделей всех подконструкций.

Преимущество такого подхода заключается в том, что подконструкции, на которые разделяется исходная расчетная модель, обладают уже значительно меньшим порядком и могут быть рассчитаны независимо друг от друга. Из-за того, что число степеней свободы каждой подконструкции намного меньше, чем в исходной конструкции, то и вычисление матрицы трансформации координат становится намного эффективнее (в основном за счет экономии объема памяти и числа перемещений данных между разными уровнями памяти ЭВМ). Кроме того, если несколько подконструкций являются идентичными, то достаточно выполнить редукцию лишь однажды, что сократит время расчета. Использование такого подхода также делает возможным применение различных численных методов к различным подконструкциям.

Разные подкострукции могут быть смоделированы, проанализированы в разных местах, в разное время и разными группами инженеров.

С другой стороны, точность расчета обычно несколько хуже в случае использования подконструкций, чем при обычном варианте, потому что некоторая полезная информация может быть потеряна, если редукция применяется не совсем корректно [66].

Большинство описанных выше редукционных методов может быть рассмотрено в суперэлементной трактовке.

Применение метода Гайана для исключения внутренних степеней свободы подконструкций упоминается в [66, 67, 86—88]. Изменения касаются только порядка выполнения операций, точность метода остается такой же, как и у классического варианта.

Точная динамическая конденсация [65] также применялась для редуцирования размера подконструкций. В этом случае конечная редуцированная модель получается частотно-зависимой и требуются специальные подходы для ее решения, однако такая модель может точно удерживать все динамические свойства полной модели. Несколько способов решения редуцированной частотно-зависимой проблемы СЗ рассмотрено в [66] и описано ранее. В [66] рассматривается пример нахождения 14 первых СЗ пространственной стержневой конструкции, разделенной на три идентичных подконструкции. Редуцирование проводилось по методу Гайана и методу точной динамической конденсации. Для решения редуцированной частотно-зависимой проблемы СЗ использовался итерационный алгоритм [66]. Как и ожидалось, все 14 первых СЗ, вычисленные по методу точной динамической конденсации, совпали с соответствующими СЗ исходной модели. Только первые три СЗ, вычисленные по методу Гайана, оказались близки к точным. Недостаток точной динамической конденсации заключается в намного больших вычислительных затратах. В [66] отмечается, что одна итерация точной динамической конденсации для вычисления одного СЗ примерно равна времени, потраченному на выполнение всего модального анализа по методу Гайана.

Комбинация метода подконструкций и итерационной IRS-редукции представлена в [89]. Результаты численных экспериментов показывают высокую точность метода и значительное сокращение размеров матрицы координатной трансформации путем ее замены на несколько аналогичных матриц гораздо меньшего размера. Несмотря на экономичность метода, авторы отмечают, что в случае больших трехмерных твердотельных КЭ-моделей метод может быть не настолько эффективным из-за большого числа граничных степеней свободы. Похожий метод разработан в [90], являющейся комбинацией IOR-метода [86] и метода подконструкций. Авторы [90] на основе численных экспериментов отмечают, что их комбинация несколько точнее и эффективнее, чем предлагаемая в [89].

Метод компонентного синтеза форм является наиболее популярным методом среди методов, применяемых для редукции больших динамических моделей. Метод получил наибольшее распространение у зарубежных исследователей и включен в большое число коммерческих программных комплексов. Фактически данный подход в случае жесткого закрепления граничных узлов является комбинацией метода подконструкций и смешанной редукции (56), в котором собственные формы подконструкций используются для представления динамики исключаемых степеней свободы в виде ряда, т. е. собственные формы играют роль координатных функций в описании движения подконструкции.

Методу модального синтеза посвящено большое число работ зарубежных авторов, подробный обзор которых выполнен в [91]. Исследования этой методики отечественных авторов можно найти в работах [87, 88, 92—101].

Ключевым вопросом при реализации модального синтеза подконструкций является выбор граничных условий, при которых определяются собственные частоты и формы подконструкций (парциальные характеристики). Конечно, свобода выбора существует только для степеней свободы, которые связаны с соединительными узлами, которые обычно, в случае подконструкций, называют внешними [99].

В соответствии с этим существующие методы модального синтеза можно классифицировать следующим образом:

1) методы жестких границ [102, 103], когда парциальные характеристики подконструкций определяются из условия жесткого закрепления внешних степеней свободы;

2) методы свободных границ [66, 104—108], когда парциальные характеристики подконструкций определяются при незакрепленных внешних степенях свободы;

3) смешанный метод [109], если возможно частичное закрепление внешних степеней свободы подконструкций при определении ее парциальных характеристик;

4) метод нагруженных границ [110], когда расчет парциальных характеристик подконструкции осуществляется с добавлением жесткостных и инерционных нагрузок к внешним степеням свободы «с целью приблизить формы к виду собственных колебаний системы в целом на данной подконструкции» [99].

Метод модального синтеза с жесткими границами впервые был предложен Харти в 1965 г. [102]. Вскоре метод получил популярное упрощение и стал называться методом Крейга — Бемптона [103]. Конечная редуцированная система уравнений, полученная по методу Крейга — Бемптона, по аналогии с (58) определяется как:

$$\left(\begin{bmatrix} K_G^{(bb)} & & & \\ & \Lambda^{(S_1)} & & \\ & & \dots & \\ & & & \Lambda^{(S_n)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_G^{(bb)} & G_b^{(S_1)} & \dots & G_b^{(S_N)} \\ G_b^{(S_1)T} & I & & \\ \dots & & \dots & \\ G_b^{(S_N)T} & & & I \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} \varphi^{(bb)} \\ q^{(S_s)} \\ \dots \\ q^{(S_N)} \end{Bmatrix} = 0, \qquad (70)$$

где

$$K_G^{(bb)} = \sum_{S=1}^{N_s} \left(K_{bb}^{(S)} - K_{(bi)}^{(S)} K_{(ii)}^{(S)-1} K_{(ib)}^{(S)} \right);$$

$$M_G^{(bb)} = \sum_{S=1}^{N_s} \left(M_{bb}^{(S)} - M_{(bi)}^{(S)} K_{(ii)}^{(S)-1} K_{(ib)}^{(S)} - K_{(bi)}^{(S)} K_{(ii)}^{S\ -1} M_{(ib)}^{(S)} + K_{(bi)}^{(S)} K_{(ii)}^{(S)-1} M_{(ii)}^{(S)} K_{(ii)}^{(S)-1} K_{(ib)}^{(S)} \right);$$

$$G_b^{(S_i)} = \Phi^{(\mathrm{S_i})} \left(M_{(bi)}^{(S_i)} - M_{(ii)}^{(S_i)} K_{(ii)}^{(S)-1} K_{(bi)}^{(S)} \right).$$

Индексы i и b обозначают внутренние (исключаемые) и внешние (граничные) степени свободы подконструкций. $S = S_1, S_2, \ldots, S_n$ — совокупность последовательно соединенных подконструкций.

Метод модального синтеза в форме Крейга — Бемптона показал себя как эффективный, весьма точный, экономичный метод и послужил основой распространенного в настоящее время формата обмена данными по динамике подконструкций между кооперированными разработчиками сложных конструкций. Однако конечная редуцированная модель все еще может содержать большое число модальных координат, если используется слишком много подконструкций. В этом случае выполняется исключение модальных координат. Применяемые методы можно найти в [66].

Методы свободных границ представлены в работах [66, 104—108]. В [66] отмечается, что точность методов свободных границ несколько ниже, чем в случае жестких границ. Для преодоления этого недостатка используются методы учета остаточной податливости и включение низкочастотной аппроксимации в трансформацию. В [104] введено понятие остаточной податливости для приближенного учета влияния в низкочастотном диапазоне не включенных в модальное разложение высших тонов подконструкции, с которым связано понятие «соединительных форм» («attachment modes») как дополнительных членов этого разложения. Метод учета остаточных эффектов второго порядка предложен в [107]. В работе [108] для построения матриц остаточной податливости балочных подсистем используются аналитические выражения для собственных форм и частот.

Смешанный метод описан в работе [109], где также предложены методы учета остаточных эффектов для повышения точности решения.

Метод нагруженных границ представлен в работе [110]. При правильном выборе этих нагрузок решение задачи о собственных значениях при синтезе подконструкций может дать более точный результат. Нагруженные собственные формы используются также в работе [111]. Неудобство этого метода по сравнению с тремя перечисленными выше очевидно ввиду того, что модификация одной из составляющих систему подконструкций при таком подходе вызывает необходимость пересчета парциальных характеристик остальных подконструкций и внесения изменений в соответствующие им блоки данных. При этом интуитивность подбора дополнительных нагрузок не гарантирует существенного повышения точности результата.

В [85] отмечается, что методы свободных и нагруженных границ больше используются для нахождения частот в средней и верхней части спектра, а методы жестких границ в основном используются для аппроксимации первых частот и форм собственных колебаний конструкции.

Использование собственных форм подкострукций для описания их движения требует решения проблемы СЗ и СВ, что приводит к определенным вычислительным усилиям, даже в случае подконструкций небольшого размера. Этого можно избежать, если в качестве форм использовать возможные функции (admissible functions). Хэил и Мейровитч [112] предложили метод, в котором каждая подкострукция описывалась возможной функцией. В качестве возможных функций несколькими авторами использовались векторы Ритца (65) и векторы из подпространства Крылова (67) [91]. Точность при этом остается сравнимой с классическим вариантом, тогда как вычислительные затраты значительно снижаются.

Общей для всех описанных подходов модального синтеза является проблема точности представления динамических свойств подконструкции в синтезированной системе в условиях, когда в модальном разложении может присутствовать ограниченное число собственных форм, — проблема усечения модального разложения. Этот вопрос принципиален, поскольку лежит в основе метода модального синтеза, обеспечивающего снижение размерности решаемых задач и вычислительных затрат за счет ограничения спектра подконструкций [99].

Очевидно, что если ставится задача исследования динамических свойств системы в диапазоне частот, ограниченных сверху некоторой частотой среза, то в модальных разложениях подконструкций должны учитываться все собственные формы, частоты которых не превосходят эту границу. Отбрасывание форм с более высокими частотами вносит погрешность в математическую модель и приводит к ошибкам в получаемых результатах. Как показывают исследования, в зависимости от способа соединения подконструкций и локальных особенностей их собственных форм влияние высших тонов на низкочастотную динамику системы меняется существенно не монотонно с возрастанием их собственных частот. Вопросам выбора критериев оценки и исследованию величины вносимой погрешности посвящены работы [97, 98, 113—115]. Предлагаемые критерии предназначены для автоматизации процесса выбора удерживаемых в модальных разложениях собственных форм подконструкций. Однако на практике наиболее употребителен подход, представленный в работах [97, 107] рекомендацией удерживать в модальных разложениях все собственные формы, частоты которых превосходят обусловленную частоту среза в 1,5…2 раза. В [99] представлена методология, предлагающая принципиально иной подход к оценке погрешности синтеза, основанная на отказе от идеи наращивания числа учитываемых собственных форм сверх минимально необходимого, определяемого количеством тонов с частотами, попадающими в исследуемый интервал. Повышение точности представления динамических свойств подконструкции в ограниченном частотном диапазоне достигается с помощью конструктивного алгоритма формирования вспомогательных членов модального разложения при неизменном наборе сохраняемых собственных форм [99].

В случае действительно больших трехмерных КЭ-моделей конструкций с использованием конечных элементов высоких порядков применение классического суперэлементного подхода также может оказаться неэффективным как из-за возможно большого числа степеней свободы на границе подконструкций, так и из-за больших размеров самих подконструкций. В этом случае применяют метод многоуровневых подконструкций. Данный метод содержит два основных шага: прямой ход (разделение) и обратный ход (сборка). На первом шаге конструкция разделяется на две или более подконструкций первого уровня. Далее каждая из подконструкций первого уровня может быть разделена на 2 или более подконструкций 2-го уровня. Процесс разделения продолжается до тех пор, пока подконструкции не достигнут нужного размера. На последнем уровне подконструкции уже состоят из базисных конечных элементов. Сборка подконструкций осуществляется в обратном порядке уровень за уровнем. Подконструкции последнего уровня собираются из базисных конечных элементов, тогда как подконструкции высших уровней собираются из подконструкций уровнем ниже. Степени свободы подконструкций, которые были общими на предыдущем уровне сборки, могут быть исключены при сборке уже на следующем уровне. Все это обеспечивает экономичный и эффективный способ решения больших систем уравнений.

Метод статической конденсации Гайана может быть удобно реализован в таком многоуровневом варианте, однако требует тщательного выбора границ подконструкций. Также не рекомендуется его использование для простых подконструкций.

Точная многоуровневая динамическая редукция рассматривалась в работах [65, 71]. Редуцированная проблема получается частотно-зависимой. В [71] предложен метод ее линеаризации. Вычисленные при фиксированных границах собственные формы используются для приближенного учета внутренней динамики подконструкции посредством линеаризации в окрестности заданного значения частоты. Однако метод приемлем только на достаточно узком частотном отрезке.

Авторы [116] предложили модифицированный вариант модального синтеза, в котором исходная модель конструкции разделялась на несколько первоначальных компонентов. Далее каждый компонент также разделялся на несколько компонентов второго уровня. Повторяя этот процесс n раз, в итоге получали модель, разделенную на компоненты n-го уровня. Собственные формы компонентов $n-1$ уровня находились с помощью собственных формы компонентов n-го уровня, используя классический метод синтеза форм колебаний. В [117] представлено сравнение точности и времени вычисления на CPU при использовании классического и модифицированного вариантов метода. Эксперименты показали, что многоуровневый вариант оказался в 6…10 раз быстрее исходного и потребовал намного меньше памяти (около 65 % в некоторых случаях).

В [118—123] предложен метод автоматических многоуровневых подкострукций (AMLS) для решения проблемы СЗ и СВ в динамике упругих тел (elastodynamics). На первом шаге AMLS рекурсивно разделяет область (domain), описываемую частными дифференциальными уравнениями (PDE) на иерархию подобластей (subdomain), основываясь на структуре разреженности исходных матриц. Далее AMLS генерирует подпространство приближенных СВ, соответствующих младшим СЗ, решая независимые проблемы СЗ и СВ на подобластях и их границах. Полученная после разделения система уравнений проецируется на подпространство СВ, в результате чего получается редуцированная система уравнений малого порядка. В [119] представлены как вариационная, так и алгебраическая постановки метода. В [119] показано, что AMLS можно рассматривать как обобщение классического метода синтеза форм. Также доказано, что AMLS является конгруэнтной трансформацией, которая возникает из декомпозиции матрицы жесткости. Эта конгруэнтная трансформация позволяет трактовать AMLS как чисто алгебраический процесс. Авторы отмечают, что их работа — это первое исследование по применению многоуровневых подконструкций для решения проблемы СЗ и СВ для эллиптических частных дифференциальных уравнений (elliptic pde eigenvalue problems). В [119] приводятся результаты сравнения AMLS с коммерческой реализацией блочного метода Ланцоша со сдвигами [35], используемой в MSC.Nastran при решении проблемы СЗ и СВ для модели автомобиля, насчитывающей порядка 3 млн степеней свободы. Для нахождения первых 400 СЗ модели с помощью AMLS было построено 24-уровневое дерево, содержащее около 12 тыс. подконструкций. Задача была решена на одном компьютере с тактовой частотой процессора 200 МГц почти за половину того времени, которое потребовалось для решения методом Ланцоша этой же проблемы на многопроцессорном вектором суперкомпьютере Cray T90. В [120] отмечается, что с использованием AMLS была решена задача по нахождению 2500 СЗ КЭ-модели автомобиля BMW, содержащая 13,5 млн степеней свободы, на обычном персональном компьютере. Также отмечается, что в последнее время AMLS полностью вытеснил метод Ланцоша в коммерческих МКЭ-комплексах, задействованных в машиностроении. В [121] описаны детали эффективной практической реализации метода для разреженных систем уравнений и представлена менее затратная по памяти модификация, позволяющая сэкономить до 50 % памяти при увеличении времени расчета до 15 %. Авторы отмечают, что точность метода не всегда повышается с увеличением количества собственных форм. Важно выбирать «значимые формы». В качестве оценки правильности выбора форм предлагается вычислять *p*-фактор как функцию СЗ в каждой подконструкции. Медленное уменьшение *p*-фактора означает, что выбранные формы приведут к несущественному изменению точности метода. Однако вычисление *p*-фактора невозможно сделать заранее. Поэтому требуются исследования дополнительных эвристик для более тщательного выбора СВ.

В [122] приводятся численные эксперименты с AMLS и блочным методом Ланцоша над КЭ-моделями плиты и оболочки. Показано, что с увеличением уровней разделения и количества подконструкций производительность рекурсивной редукции возрастает. К примеру, для КЭ модели плиты с 121 тыс. степенями свободы метод рекурсивной редукции с разделением на 8, 16, 32 и 64 подконструкций оказался быстрее метода Ланцоша соответственно в 1,23, 3,43, 4,78, и 5,14 раза. Для оболочечной конструкции разделение на 64, 128 и 256 подконструкций позволило ускорить время расчета по сравнению с методом Ланцоша в 1,06, 4,79 и 6,82 раза соответственно. К тому же результаты проведенных расчетов показывают, что с увеличением уровней разделения точность метода снижается незначительно в сравнении с методом Ланцоша. В [123] произведен расчет КЭ-модели автомобиля с 1,165,871 степенями свободы. Использовалось 4-уровневое разделение на 31 подконструкцию. Метод рекурсивной редукции оказался в 6,7 раз быстрее метода Ланцоша, тогда как максимальная относительная погрешность не превысила 2,25 %, что является достаточно приемлемым результатом в инженерных расчетах.

Также известны многоуровневые варианты метода итераций в подпространстве [20—22].

Что касается первых отечественных работ, связанных с модальным анализом, то теория вычисления частот свободных колебаний методом спектральной функции была сформулирована и изложена в работах С. А. Бернштейна [124, 125] и подробно с примерами описана в его учебнике [126].

Он утверждал, что метод теоретически точен и позволяет вычислять частоту колебаний систем с любым числом степеней свободы [126, с. 73]. Однако дальше вычисления первых двух частот колебаний систем применение эта теория не получила из-за математических трудностей.

Еще ранее, в 1894 г., Донкерлеем была предложена, без теоретического обоснования, приближенная формула для вычисления первой частоты свободных колебаний систем, которая, как было показано позднее [127, 128], получается из общих неравенств спектрального метода.

Разработка многочисленных приближенных методов вычисления низших частот и критических нагрузок была связана со сложностями реализации методов, приводящих к детерминантам n-го порядка для систем с n степенями свободы.

Практически все приближенные методы вычисления частот, разработанные в начале 20 в., основывались на предложенной английским физиком Релеем [129—131] идее замены истинной формы колебаний системы какой-либо подходящей по своему виду кривой. Многочисленные варианты реализации этой идеи получили название метода Релея [126, с. 98—115]: метод приведения масс, энергетический метод, метод возможных перемещений, метод последовательных приближений.

Эта же идея была использована позже в большом количестве работ по исследованию устойчивости стержней и рам. В большинстве из них использовался прием замены истинной формы потери устойчивости соответствующей кривой относительно какой-либо поперечной нагрузки (в случае высотных сооружений), создающих ее [132—134 и др.].

Оригинальная и эффективная модификация метода приведения масс была предложена и развита в работах С. Я. Земленухина [135—137].

Позднее с ростом возможностей вычислительной техники эти модификации, идеи и подходы были развиты в работах В. А. Игнатьева [134, 138], Гриненко и Мокеева [139], Ивантеева и Чубаня [97].

Обстоятельный обзор и анализ отечественных работ по этому направлению был выполнен В. А. Игнатьевым [81].

Среди авторов, занимающихся проблематикой сложных конструкций, можно отметить работу Пржемницкого [140], в которой были впервые изложены основные идеи метода суперэлементов. Дальнейшее развитие данный метод получил в работах Постнова и его учеников [141—143]. Также здесь следует отметить работы А. С. Вольмира [92—94], Е. А. Вороненка [144—146], О. Л. Рудых [147—149], В. П. Шмакова [95, 150, 151], А. И. Лиходеда [96, 152—153], В. А. Игнатьева [1, 81, 87, 154], С. Ю. Фиалко [2, 37], А. М. Белостоцкого [100, 101, 155, 156] и др. [157—164].

Что касается применения суперэлементных методик к выполнению модального анализа, то в отечественной практике получили распространение уже упомянутые многоуровневые методы синтеза форм, в которых допускается поэтапное укрупнение фрагментов сложной системы. При этом синтез группы подконструкций на более низком уровне дает информацию о подконструкции следующего уровня, получаемой посредством их соединения [99].

Метод суперэлементов, представленный в работах [92—94], ориентирован на использование собственных форм, определяемых с учетом влияния соседних суперэлементов вдоль общих границ. Предложенный В. И. Ивантеевым и В. Д. Чубанем [97] метод многоуровневой динамической конденсации может быть отнесен к методам жестких границ и на низшем уровне соответствует модальному синтезу в форме Крейга — Бемптона [103]. При этом подконструкция рассматривается как суперэлемент с внутренними обобщенными неизвестными, соответствующими ее собственным формам.

Для повышения точности получаемых при синтезе подконструкций решений в условиях ограниченного числа выбираемых собственных форм в работах [95, 96, 99] предлагается дополнять модальное разложение корректирующей составляющей, которая строится в виде многочлена относительно квадрата частоты колебаний, коэффициенты которого определяются как решения рекуррентной последовательности статических краевых задач. Поэтому степень многочлена может неограниченно наращиваться. При этом коэффициенты модальных членов разложения изменяются таким образом, что вклад тонов с высокими собственными частотами в области низких частот колебаний уменьшается с ростом порядка корректирующего многочлена.

Другие работы, посвященные модальному синтезу, можно найти в [100, 101, 159].

Кроме того, отечественными исследователями развивалось и продолжает развиваться направление по разработке методов линеаризации редуцированной системы уравнений в форме (24).

Как уже было отмечено ранее, система уравнений (24) является частотно-зависимой, и соответствующая редуцированная проблема СЗ и СВ является нелинейной по отношению к неизвестному СЗ. Один из способов ее решения состоит в линеаризации этой системы в некотором интересующем диапазоне частот. В этом случае (24) заменяется на приближенное решение:

$$\begin{aligned} &D_R(\lambda)=\left(K_{mm}+\lambda M_{mm}\right)+D_S(\lambda);\\ &D_S(\lambda)=-(K_{ms}-\lambda M_{ss})\left(K_{ss}-\lambda M_{ss}^{-1}\right)\left(K_{sm}-\lambda M_{sm}\right)\approx\left(\Delta K_{mm}^{s}-\lambda\Delta M_{mm}^{s}\right), \end{aligned} \tag{71}$$

где ΔK_{mm}^{s}, ΔM_{mm}^{s} — матрицы коррекционных добавок к матрицам жесткости и масс, вносимые исключаемыми степенями свободы.

Тогда нелинейная проблема СЗ (23) становится классической проблемой СЗ и может быть успешно решена с применением традиционных методов.

В работах В. В. Мокеева [139, 165, 166] предложен метод линеаризации, основанный на совпадении исходной (5) и конденсированной (71) систем в интересующем диапазоне частот. Если диапазон частот задается двумя граничными частотами (наибольшее и наименьшее СЗ), полученными из решения исходной системы уравнений (5), то матрицы коррекционных добавок определяются из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}\Delta K_{mm}^{s}-\lambda_{\min}\Delta M_{mm}^{s}=D_S(\lambda_{\min});\\ \Delta K_{mm}^{s}-\lambda_{\max}\Delta M_{mm}^{s}=D_S(\lambda_{\max}).\end{cases}, \tag{72}$$

Из (72) следует, что:

$$\begin{aligned} &\Delta K_{mm}^{s}=\frac{1}{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}\left[\lambda_{\max}D_s\left(\lambda_{\min}\right)-\lambda_{\min}D_s(\lambda_{\max})\right],\\ &\Delta M_{mm}^{s}=\frac{1}{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}\left[D_s(\lambda_{\max})-D_s(\lambda_{\min})\right]. \end{aligned} \tag{73}$$

В [166] представлен двухшаговый метод частотно-динамической конденсации, в котором на первом шаге выполняется линеаризация (73), а на втором шаге из восстановленных полных векторов строится координатная трансформация, применяемая к исходной системе уравнений. В [66] отмечают, что точность данного метода обычно даже ниже, чем редукции по методу Гайна. В действительности при использовании только двух базовых частот из (5) точность метода будет обеспечена в нижнем диапазоне, не сильно превосходящем количество выбранных частот.

В работе С. С. Гусева и Б. А. Куранова [167] предлагается похожий способ получения частот, который также может быть использован в методе частотно-динамической конденсации. Здесь исключение внутренних степеней свободы на первом шаге выполняется на основе некоторого начального значения. Вычисленное собственное значение на следующем шаге используется для получения матрицы координатной трансформации и повторного вычисления СЗ до достижения необходимой точности.

В работах В. А. Игнатьева и его учеников [1, 81—84, 87, 88, 168—177] предложено несколько вариантов метода последовательной (блочной) частотно-динамической конденсации, основанных на последовательном исключении второстепенных степеней свободы парциальных подсистем при известных СЗ и/или СВ этих подсистем. Алгоритм метода состоит из нескольких шагов. На первом шаге строится базовая парциальная подсистема — система уравнений, редуцированная по методу Гайана только к главным степеням свободы. Все оставшиеся второстепенные степени свободы разделяются на несколько групп или блоков. На втором шаге для каждой группы второстепенных степеней свободы формируется расширенная парциальная подсистема, также редуцированная по методу Гайана, но к уже увеличенному числу главных степеней свободы. На третьем шаге выполняется частотная конденсация расширенной подсистемы к базовой на основе совпадения обеих подсистем в интересующем диапазоне частот. При этом диапазон частот задается не двумя частотами, как это было в работе В. В. Мокеева, а обычно всеми частотами редуцированного спектра, в котором эти обе подсистемы совпадают. Именно этим и объясняется более высокая точность метода. Решение проблемы СЗ и СВ не представляет труда, так как обе парциальные подсистемы состоят из небольшого числа степеней свободы. Далее из полученной редуцированной системы уравнений вычисляются матрицы коррекционных добавок. Конденсационные добавки и есть тот вклад, который вносят исключаемые второстепенные степени свободы каждой группы в общую динамику системы. Далее 2-й и 3-й шаги алгоритма повторяются для каждой последующей группы второстепенных степеней свободы, пока все оставшиеся степени свободы не будут исключены. Суммой всех полученных конденсационных добавок определяется итоговая редуцированная система уравнений, которая по динамическим характеристикам будет близка к исходной.

Таким образом, применение последовательной (блочной) частотно-динамической конденсации позволяет заменить неполную проблему СЗ и СВ высокого порядка на последовательность проблем СЗ и СВ для систем относительно небольшого размера с возможностью их решения традиционными методами. В этой связи методику можно трактовать как одну из алгебраических форм суперэлементного подхода.

Кроме того, в работах [81—84, 87, 88, 169—178] можно отчетливо выделить несколько модификаций метода, отличающихся друг от друга тем, какие парциальные параметры учитываются при выполнении условия совпадения парциальных систем:

1) на основе совпадения минимальной/максимальной частоты этих систем [81];

2) на основе совпадения всего редуцированного спектра [173—177];

3) на основе совпадения всего редуцированного спектра и компонентов форм колебаний [1, 81, 87, 88, 169];

4) на основе совпадения компонентов форм колебаний, кинетической и потенциальной энергии [1, 82, 83, 87, 88, 172].

Численные эксперименты, проведенные в [1, 81, 87] над двумерными и одномерными регулярными балочными системами с использованием блочной частотно-динамической конденсации на основе совпадения редуцированной части спектра СЗ и компонентов СВ, показали, что метод позволяет с достаточной точностью определить 50…60 % нужной части спектра частот.

Энергетический вариант частотно-динамической конденсации фактически является одним из видов модальной редукции, обсуждаемой ранее, и использует ту же процедуру Релея — Ритца для выполнения модальной трансформации матриц исходной системы уравнений. Физическая интерпретация такой трансформации основывается на совпадении кинетической и потенциальной энергий исходной и редуцированной систем [81]. Расчеты модельных регулярных стержневых систем, выполненные К. А. Сухиным в [172] по энергетическому варианту частотно-динамической конденсации, показали, что метод позволяет с достаточной точностью определить от 30 % (конструкции рам и пластин) до 70 % (балочные системы) редуцированного спектра, в зависимости от количества главных степеней свободы. «При введении дополнительных удерживаемых степеней свободы в блоки второстепенных степеней свободы метод позволяет лучше аппроксимировать формы колебаний, тем самым, повысить точность нахождения СЗ» [172].

При выполнении расчетов по методу частотно-динамической конденсации авторы данной работы столкнулись с проблемой сингулярности матрицы, составленной из компонентов СВ подсистем, и, как следствие, невозможности ее дальнейшего обращения. В [174] была предложена модификация, в которой при выполнении динамической конденсации масс использовалась матрица полных СВ базовой парциальной подсистемы, что позволило сделать метод более устойчивым, но менее точным. Расчеты, выполненные в [174], показывают меньшую точность метода по сравнению с модификациями, учитывающими компоненты СВ-подсистем. Также в этом случае метод становится более зависим от мест расположения главных и второстепенных степеней свободы. «Парциальные системы следует строить так, чтобы второстепенные степени свободы были равномерно распределены между главными степенями, т. е. позволяли уточнять форму колебаний (условие подобия базовой и расширенной парциальных подсистем)» [174]. Если это условие не выполняется, то погрешность в вычислении частот резко возрастает.

Решение неполной алгебраической проблемы СЗ и СВ в форме метода сил методом частотно-динамической конденсации не вызывает особых сложностей. А. В. Макаровым в [88] разработаны несколько эффективных модификаций метода частотно-динамической конденсации для уравнений в форме метода сил, позволяющих сэкономить время расчета по сравнению со стандартным вариантом.

Элемент матрицы податливости, как известно, есть перемещение точки приложения массы от действия единичной силы. Удаление массы либо группы масс не изменяет смежные элементы матрицы податливости. И матрица податливости парциальной системы состоит из блоков элементов матрицы исходной. Напротив, элемент матрицы жесткости — это реакция во введенной упругой связи, закрепляющей сосредоточенную массу. Удаление масс и упругой связи в процедуре конденсации изменяет смежные элементы матрицы жесткости, так как изменяются размеры конечных элементов. Поэтому для каждой парциальной системы необходимо корректировать матрицу жесткости и матрицу масс (в случае распределенной нагрузки) [88].

Такую корректировку обеспечивает статическая конденсация Гайана.

В этой связи узким местом блочной частотно-динамической конденсации для уравнений в форме метода перемещений или МКЭ является процедура многократной статической конденсации заданной системы к парциальным системам. Построение парциальной системы требует значительных вычислительных затрат, связанных с обращением большого блока второстепенных степеней свободы и последующих матричных умножений высокой размерности (27). К тому же для построения следующей парциальной системы приходится заново повторять эту «тяжелую» процедуру. Все это может привести к тому, что задача не может быть решена из-за высокой размерности, и время расчета может существенно возрасти и стать сопоставимым с временем расчета с использованием традиционных методов.

Для решения проблемы низкой производительности при создании парциальных систем в [84, 172, 173] предлагается выбирать главные степени свободы так, чтобы весь блок второстепенных степеней свободы распался на ряд независимых друг от друга блоков. Тогда матрицы жесткости и масс будут представлены в квазидиагональной форме, а матрицы, статически конденсированные к главным степеням свободы, можно переписать в блочной форме:

$$\begin{aligned}
&K_{mm}^{G} = K_{mm} - \sum_{i=1}^{t} K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)}; \\
&M_{mm}^{G} = M_{mm} - \sum_{i=1}^{t} M_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)} - K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} M_{sm}^{(i)} + \\
&\qquad + K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} M_{ss}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Матрицы жесткости и масс парциальных систем могут быть получены из (74) с помощью обратного преобразования:

$$\begin{aligned}
&K_{m^{(i)}m^{(i)}}^{G} = K_{mm}^{G} + K_{ms}^{(i)} K_{ss}^{(i)} K_{sm}^{(i)}; \\
&M_{m^{(i)}m^{(i)}}^{G} = M_{mm}^{G} + M_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)} + K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} M_{sm}^{(i)} - \\
&\qquad - K_{ms}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} M_{ss}^{(i)} \left[K_{ss}^{(i)} \right]^{-1} K_{sm}^{(i)}.
\end{aligned} \tag{75}$$

Данную модификацию также можно рассматривать как одну из форм суперэлементного подхода. Согласно расчетам, выполненным в [173], предложенная модификация позволила определить около 70 % редуцированного спектра СЗ с гарантированной точностью для модели балочной системы с 142 степенями свободы. В [175] выполнены расчеты нескольких моделей стержневой конструкции с использованием метода, получившегося применением данной модификации к более устойчивой форме метода, предложенной в [174]. Результаты показывают большую точность полученной модификации по сравнению с [174].

Предложенный подход со статической подготовкой для более эффективного формирования парциальных систем предполагает наличие одних и тех же главных степеней свободы на всех этапах исключения блоков второстепенных степеней свободы. При этом требуется, чтобы абсолютно все степени свободы граничных узлов, используемых для соединения второстепенных степеней свобод и собираемых в независимые блоки, должны быть выбраны в качестве главных. «Найти узкие разделители возможно лишь для определенного узкого круга задач (задачи, обладающие высокой степенью повторяемости подсистем)» [37], поэтому это может приводить к увеличению размерности конденсированной к главным степеням свободы системы. Более того, при таком способе конденсации группа второстепенных степеней свободы не всегда позволяет уточнить форму колебаний всей конструкции.

Автором данной работы в [177] представлен классический суперэлементный подход, в котором для исключения второстепенных степеней свободы подконструкциий используется частотно-динамическая конденсация [174]. Для каждой подконструкции решается своя проблема СЗ и СВ, никак не связанная с решением в других подконструкциях. В каждой подконструкции задается своя базовая парциальная система и выполняется частотно-динамическая конденсация всех второстепенных степеней свободы за один шаг, т. е. точно в пределах рассматриваемой подконструкции. Полученные редуцированные системы объединяются в итоговую редуцированную систему по классическим правилам конструирования ансамбля конечных элементов в МКЭ. Преимущество такого подхода в том, что он не требует каких-либо дополнительных накладных расходов для формирования парциальных систем, как это было в предшествующих формулировках метода. Более того, в этом случае теперь на точность метода никак не влияет расположение главных и второстепенных степеней свободы, как это было в [174], так как их исключение тут выполняется за один шаг. Расчеты, выполненные в [177], показывают, что метод, как и модификация, предложенная в [173], позволяет определить с достаточной степенью точности до 70 % редуцированного спектра СЗ в случае многопролетной балки и до 30 % для плиты, моделируемой системой перекрестных балок.

Как уже упоминалось ранее, более привлекательными с точки зрения расходования ресурсов ЭВМ являются многоуровневые варианты при суперэлементных подходах. В [177] предпринята попытка реализовать такой подход в сочетании с методом частотно-динамической конденсации. К сожалению, результаты расчетов показали, что точность нахождения СЗ резко снижается с увеличением уровней разделения подконструкций, предположительно из-за повторной конденсации уже сконденсированных блоков, полученных на предыдущих шагах метода и уже обладающих ценной информацией о динамике системы. Поэтому требуется проведение дальнейших исследований для построения эффективного многоуровневого алгоритма метода.

Еще одним направлением, в котором были замечены усилия отечественных авторов [70, 81, 87, 144—149, 154, 178, 179], является построение редукционных схем на основе интерполяционных формулировок.

Рассматривая матрицу статической редукции R_G в (27), выражающую связь между главными и второстепенными степенями свободы

$$R_G = -K_{ss}^{-1} K_{sm}, \tag{76}$$

можно, исходя из физического смысла, положить, что столбцы этой матрицы представляют собой перемещения (статические формы) второстепенных степеней свободы, вызванные от последовательных единичных смещений связей, наложенных на главные степени свободы. «Свойство гладкости изменения перемещений вдоль любой произвольно выбранной линии позволяет, зная только значения перемещений в основных узлах, определить перемещения во всех остальных узлах этой линии» [178]. Используя данное свойство и выбирая в качестве функции перемещений аппроксимирующий сплайн, выражение (27) можно записать:

$$\varphi_s = -K_{ss}^{-1} K_{sm} \varphi_m = \begin{bmatrix} S_0\left(x_i, y_i, z_i\right) \\ \ldots \\ S_k(x_i, y_i, z_i) \\ \ldots \\ S_J(x_i, y_i, z_i) \end{bmatrix} \varphi_m, \tag{77}$$

где S_k — матричная форма записи сплайн-функции; $k = 0...J$ — номер области перемещений в узлах второстепенных степеней свободы, аппроксимируемой сплайном; J — количество аппроксимируемых областей (количество сплайнов); x_i, y_i, z_i являются физическими координатами узлов второстепенных степеней свободы в случае трехмерной системы координат: $i = 0, \ldots, M$ — номер узла второстепенных степеней свободы; M — кол-во узлов.

В случае выбора в качестве интерполирующей функции кубического сплайна в трехмерной системе координат имеем:

$$\begin{aligned} &S_k(x_i, y_i, z_i) = S_{xy}(x_i, y_i) S_{yz}(y_i, z_i) S_{xz}(x_i, z_i); \\ &S_{xy}(x_i, y_i) = S\left(x_i\right) S\left(y_i\right);\ S_{yz}(y_i, z_i) = S(y) S(z);\ S_{xz}(x_i, z_i) = S\left(x\right) S(z); \\ &S\left(x_i\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3;\ S\left(y_i\right) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3; \\ &S(z_i) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3. \end{aligned} \tag{78}$$

Коэффициенты каждого сплайна определяются, используя значения функции и ее первой производной на границе, т. е. в узлах конденсации.

Если исходная КЭМ содержит густую сетку узлов $0 \ldots N$, то, используя сплайн-преобразование (77), выполняется переход к разреженной сетке узлов

$0 \dots n$. Поэтому сплайн-преобразование является наглядным примером методов редукции физических координат и одной из модификаций метода Гайана.

Применительно к модальному анализу в [70] проведен расчет редуцированного спектра СЗ для одномерной модели балки, выполненный по методу Гайана и сплайн-интерполяции. Результаты расчета показывают полное совпадение в точности нахождения СЗ по обоим вариантам метода. Построение сплайн-преобразования (77) не представляет каких-либо вычислительных сложностей по сравнению со стандартным преобразованием Гайана, требующим обращения блока второстепенных степеней свободы. Сложность алгоритма заключается в необходимости обеспечения условия совместности перемещений и деформаций на границах сплайнов, что требует учета всех особенностей КЭМ путем тщательного выбора областей и узлов конденсации сплайнов.

Автор работы [149] использовал сплайн-интерполяцию при построении парциальных систем в методе частотно-динамической конденсации В. А. Игнатьева.

Также следует отметить, что некоторыми авторами в последнее время прикладываются усилия, направленные на объединение двух устоявшихся методик решения проблемы СЗ и СВ высокого порядка. Основная идея проста и довольно очевидна. На первом шаге используется какой-либо редукционный метод для получения грубой, приблизительной оценки СЗ и/или СВ. На втором шаге полученная грубая модель используется в качестве начального приближения и/или предобуславливателя в каком-либо итерационном процессе. Ранее уже упоминался эффективный метод сопряженных градиентов с предобуславливанием, в котором в качестве модели грубого уровня использовалась либо алгебраическая модель, полученная путем неполной факторизацией матрицы жесткости, либо механическая, полученная агрегатным способом [2]. Приближенная модель, полученная агрегатным способом, также использовалась в сочетании с методом итерирования подпространства [56]. Комбинация метода итерирования подпространства с методом динамической конденсации приведена в [66, с. 134—143], где вместо уточнения подпространства СВ используется итерирование матрицы динамической редукции (21). Применение процедуры Релея — Ритца выполняется не на каждой итерации алгоритма, что делает метод более экономичным. Авторы работы [180] предлагают комбинацию AMLS-редукции и метода итерирования подпространства, в которой редуцированная по AMLS система уравнений использовалась в качестве предобуславлвателя при итерационном построении начального подпространства базисных СВ. Замена порядка проблемы при решении линейных систем уравнений с правой частью позволила значительно сократить время расчета.

Заключение.

1. Условно все работы по проблеме СВ и СЗ можно разделить на две группы. К первой относятся методы, основанные на физическом смысле задачи и зависящие от расчетной схемы сооружения или объекта: метод суперэлементов, сплайн-интерполяция, многоступенчатая конденсация, свойства регулярных систем. Ко второй — методы, основанные на математических закономерностях преобразованиях матриц и зависящие от так называемых

профилей матриц (диагональные, ленточные, профильные, блочно-ленточные и т. д.). Это вариационные методы, итерационные и т. д.

2. Установлено, что применение итерационных методов для разреженных матриц сопряжено с проблемой медленной сходимости для плохо обусловленных задач строительной механики. Значительное ускорение сходимости достигается введением предобуславливания и сдвигов.

3. Наиболее эффективным среди итерационных методов в настоящее время является метод сопряженных градиентов с предобуславливанием на основе неполного разложения Холецкого или многоуровневым (многосеточным) предобуславливателем. Другим эффективным средством является уменьшение порядка решаемой задачи путем исключения большей части второстепенных степеней свободы в КЭМ на основе выведенной зависимости между главными и второстепенными степенями свободы.

4. Из обзора следует, что наиболее эффективным способом получения редуцированной системы уравнений является использование метода многоуровневого модального синтеза, применяемого к автоматически построенным подконструкциям глубокого вложения (AMLS).

5. Наиболее эффективным подходом к решению большеразмерных задач динамики и устойчивости представляется объединение двух устоявшихся методик решения проблемы СЗ и СВ высокого порядка.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Галишникова В. В., Игнатьев В. А.* Регулярные стержневые системы (Теория и методы расчета). Волгоград : ВолгГАСУ, 2006. 552 с.

2. *Фиалко С. Ю.* Агрегатный многоуровневый метод решения конечно-элементных задач строительной механики: дис… д-ра техн. наук. Киев, 2003.

3. *Wilkinson J. H.* The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford University Press, 1965.

4. *Parlett B. N.* The Symmetric Eigenvalue Problem. 2nd ed., SIAM, Philadelphia, 1997.

5. *Cuppen M. J.* A divide and conquer method for the symmetric tridiagonal eigenproblem // Numer. Math. 1981. Vol. 36. Pp. 177—195.

6. *Bischof C., Van Loan C.* The WY representation for products of Householder matrices // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1987. Vol. 8. Pp. 2—13.

7. *Dhillon I. S.* A New $O(n^2)$ Algorithm for the Symmetric Tridiagonal Eigenvalue/Eigenvector Problem Ph.D. thesis. Berkley CA, 1997; available as UC Berkeley Technical report UCB//CSD-97-971.

8. *Dhillon I. S., Parlett B. N.* Multiple representations to compute orthogonal eigenvectors of symmetric tridiagonal matrices // Linear Algebra Appl. 2004. № 387. Pp. 1—28.

9. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / пер. с англ. М. : Стройиздат, 1982.

10. *Bathe K. J., Wilson E. L.* Large eigenvalue problems in dynamic analysis // ASCE, Journal of Engineering Mechanics. 1972. 98. Pp. 1471—1485.

11. *Wilson E. L., Iton T.* An eigensolution strategy for large systems // Computers and Structures. 1983. Vol. 16. № 1—4. Pp. 259—265.

12. *Wilson E. L.* Three dimensional dynamic analysis of structures // Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, USA, 1996.

13. *Yamamoto Y., Ohtsubo H.* Subspace iteration accelerated by using Chebyshev polynomials for eigenvalue problems with symmetric matrices // International Journal for Numerical Method in Engineering. 1976. Vol. 10. Pp. 935—944.

14. *Bathe K. J., Ramaswamy J.* An accelerated subspace iteration method // Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 1980. Vol. 23. Pp. 313—331.

15. Accelerated subspace iteration with aggressive shift / Q. C. Zhao, P. Chen, W. B. Peng, Y. C. Gong, M. W. Yuan // Computers & Structures. 2007. Vol. 85. Pp. 1562—1587.

16. *Jung H. J., Kim M., Lee I.* An Improved Subspace Iteration Method with shift for structures with multiply natural frequencies // Computers and Structures. 1999. Vol. 70. № 6. Pp. 625—633(9).

17. *Jia Z.* A refined subspace iteration algorithm for large sparse eigenproblems // Appl. Numer. Math. 2000. Vol. 32. Pp. 35—52.

18. *Cheu T. C., Johnson C. P., Craig R. R.* Computer algorithms for calculating efficient initial vectors for subspace iteration method // International Journal for Numerical Methods in Engineering.1987. Vol. 24. Pp. 1841—1848.

19. *Qian Y., Dhatt G.* An accelerated subspace iteration method for generalized eigenproblems // Computers and Structures. 1995. Vol. 54. Pp. 1127—1134.

20. *Nguyen D. T., Arora J. S.* Eigensolution for large structural systems with sub-structures // Int. J. Numer. Meth. Engrg. 1980. Vol. 4. Pp. 333—341.

21. *Lu X., Lin J. H., Zhong W. X.* Subspace iteration method in multi-level substructure systems // Computers and Structures. 1989. Vol. 33. Pp. 459—462.

22. *Leo R., Mazolli M*. Multilevel Dynamic Substructure Iteration Method // Nuclear Engineering and Design. Amsterdam. 1989. Vol. 111. Pp. 251—254.

23. *Lanczos C.* An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // J. Res. Nat. Bur. Stand. B. Vol. 45. Pp. 255—281.

24. *Kaniel S.* Estimates for some computational techniques in linear algebra // Math. Comput. 1966. Vol. 20. № 95. Pp. 369—378.

25. *Saad Y.* On the rates of convergence of the Lanczos and the block-Lanezos methods // SIAM J. Nurner. Anal. 1980. Vol. 17. № 5. Pp. 687—706.

26. *Paige C. C.* The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large sparse matrices. Ph. D. thesis. University of London, 1971.

27. *Parlett B. N.* The symmetric Eigenvalue Problem. University of California, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1980.

28. *Scott D. S.* The Lanczos algorithm // In Duff (1981b). Pp. 139—159.

29. *Parlett B. N., Scott D. S.* Lanczos algorithm with selective orthogolization // Math. Comp. 1979. Vol. 33. Pp. 217—238.

30. *Simon H.* The Lanczos algorithm with partial reorthogonalization // Math. Comp. 1984. Vol. 42. Pp. 115—136.

31. *Fialko S. Yu., Kriksunov E. Z., Karpilovsky V. S.* A block Lanczos method with spectral transformations for natural vibrations and seismic analysis of large structures in SCAD software // CMM-2003 — Computer Methods in Mechanics, June 3—6, 2003, Gliwice, Poland. Pp. 129—130.

32. *Golub G. H., Underwood R. R.* The block Lanczos method for computing eigenvalues // In Mathematical Software III, ed. by J. R. Rice, Academic Press: New York, 1977. Pp. 364—377.

33. *Ruhe A.* Implementation aspects of band Lanczos algorithm for computation of eigenvalues of large sparse matrices // Math. Comput. 1979. Vol. 33. No. 146. Pp. 680—687.

34. *Cullum J., Donath W. E.* A block Lanczos algorithm for computing the q algebraically largest eigenvalues and a corresponding eigenspace of large sparse real symmetric matrices // Proc. of the 1974 IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, 1974.

35. *Grimes R. G., Lewis J. G., Simon H. D.* A shifted Block Lanczos Algorithm for Solving Sparse Symmetric Generalized Eigenproblems // SIAM J. Matrix Anal. Appl, 1994. V. 15. No. 1. Pp. 1—45.

36. *Фиалко С. Ю.* Сопоставление прямых и итерационных методов решения больших конечно-элементных задач строительной механики // А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев : Сталь, 2002. С. 552—569.

37. *Фиалко С. Ю.* Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах. М. : СКАД-Софт, 2009. 160 с.

38. *Якушев В. Л., Симбиркин В. Н., Филимонов А. В.* Решение большеразмерных задач строительной механики методом конечных элементов в программном комплексе STARK ES // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Сб. трудов международной научно-практич. конф. МГСУ, 2010. С. 516—526.

39. *Fialko S. Yu.* High-performance iterative and sparse direct solvers in Robot software for static and dynamic analysis of large-scale structures // Proceedings of the second European conference on computational mechanics, Cracow, Poland, June 26—29. 2001. 18 p.

40. *Feng Y. T.* An integrated Davidson and multigrid solution approach for very large scale symmetric eigenvalue problems // Comput. Meths. Appl. Mech. Eng. 1999. No. 190. Pp. 3543—3563.

41. *Papadrakakis M.* Solving large — scale problems in mechanics. John Wiley & Sons Ltd., 1993.

42. *Hestenes M. R. Stiefel E.* Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems // J. Res. Natl. Bur. Stand. 1952. Vol. 49. Pp. 409—436.

43. *Knyazev A. V.* Toward the optimal preconditioned eigensolver: locally optimal block preconditioned conjugate gradient method // SIAM J. Sci. Comput. 2001. V. 23. No. 2. Pp. 517—541.

44. *Jang H.-J.* Preconditioned conjugate gradient method for large generalized eigenproblems // Trends in Mathematics Information Center for Mathematical Sciences. 2001. Vol. 4. No. 2. Pp. 103—109.

45. *Cho Y., Yong Y.-K.* A multi-mesh, preconditioned conjugate gradient solver for eigenvalue problems in finite element models // Computers & Structures. 1996. Vol. 58. No. 3. Pp. 575—583.

46. *Meijerink J. A., Van der Vorst H. A.* An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix // Math. Comp. 1977. Vol. 31. Pp. 148—162.

47. *Smith C., Wait R., Addison C.* The effectiveness of drop-tolerance based incomplete cholesky preconditioners for the conjugate gradient method // Numerical Analysis. 1996. Vol. 75. Pp. 325—344.

48. *Ajiz M. A., Jennings A.* A robust incomplete Choleski-conjugate gradient algorithm // Int. j. numer. methods eng., 1984. Vol. 20. Pp. 949—966.

49. *Suarjana M., Kincho Law H.* A robust incomplete factorization based on value and space constrains // International Journal for Numerical Methods In Engineering. 1995. Vol. 38. Pp. 1703—1719.

50. *Kaporin I. E.* High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its $U^TU+U^TR+R^TU$-decomposition // Numerical Linear Algebra with Applications. 1998. Vol. 5. Pp. 483—509.

51. *Benzi M., Tuma M.* A robust incomplete factorization preconditioner for positive definite matrices // Numer Linear Algebra Appl. 2001. Vol. 99. Pp. 1—20.

52. *Ruge J. W., St¨uben K.* Multigrid methods // SIAM, Philadelphia. Frontiers in Applied Mathematics. 1987. Vol. 3. Pp. 73—130.

53. *Schwarz H. R.* The eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$ for symmetric matrices of high order // Comp. Methods App. Mech. Engg. 1974. No. 3. Pp. 11—28.

54. *Schwarz H. R.* Two algorithms for treating $Ax = \lambda Bx$ // Comput. Meths. Appl. Mech. Eng. 1977. No. 12. Pp. 181—199.

55. *Vanek P., Mandel J., Brezina M.* Algebraig multigrid based on smoothed aggregation for second and fourth order problems // Computing. 1996. Pp. 179—196.

56. *Bulgakov V. E., Belyi M. E., Mathisen K. M.* Multilevel aggregation method for solving large-scale generalized eigenvalue problems in structural dynamics // Int. J. Numer. Methods Eng. 1997. Vol. 40. Pp. 453—471.

57. *Saad Y., Suchomel B.* ARMS: An algebraic recursive multilevel solver for general sparse linear systems // Numerical Linear Algebra with Applications. 2002. Vol. 9. No. 5. Pp. 359—378.

58. *Pereira F. H., Verardi S. L. L., Nabeta S. I.* A fast algebraig multigrid preconditioned conjugate gradient solver // Appl. Math. And Comp. 2006. Vol. 179. Pp. 344—351.

59. *Капорин И. Е., Милюкова О. Ю.* Предобусловливание итерационных методов для эффективного массивно-параллельного решения систем линейных алгебраических уравнений // Труды XIII Международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование», 3—7 октября 2011 г., г. Саров, 2012. С. 243—252.

60. *Капорин И. Е., Милюкова О. Ю., Бартенев Ю. Г.* Массивно-параллельные предобусловленные итерационные методы решения стандартных задач линейной алгебры // Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский НИИ ядерной физики. Саров, 2013.

61. *Харченко С. А.* Влияние распараллеливания вычислений с поверхностными межпроцессорными границами на масштабируемость параллельного итерационного алгоритма решения систем линейных уравнений на примере вычислений вычислительной гидродинамики // Материалы международной науч. конф. «Параллельные вычислительные технологии ПАВТ 2008».

62. Решение плохообусловленных симметричных СЛАУ для задач строительной механики параллельными итерационными методами / В. Л. Якушев, В. Н. Симбиркин, А. В. Филимонов, П. А. Новиков, И. Н. Коньшин, Г. Б. Сушко, С. А. Харченко // Труды Международной суперкомпьютерной конференции «Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее», 19—24 сентября 2011 г., г. Новороссийск. М. : МГУ, 2011. С. 333—342.

63. *Коньшин И. Н., Сушко Г. Б., Харченко С. А.* Трехуровневая MPI-TBB-CUDA параллельная реализация блочного итерационного алгоритма решения СЛАУ для мелкоблочных неструктурированных разреженных матриц // Труды Международной суперкомпьютерной конференции (17—22 сентября 2012 г., г. Новороссийск). М. : МГУ, 2012. 752 с.

64. Autodesk robot structural analysis. Руководство пользователя. Теоретическая база методов динамического расчета конструкций. URL: http://docs.autodesk.com/RSA/2013/RUS/filesROBOT/GUID-CBD64D76-847E-4CFC-A366-674F04CCC4D5.htm. Дата обращения: 09.11.2014.

65. *Leung Y. T.* An accurate method of dynamic condensation in structural analysis // Int. J. Num. Meth. Engng. 1978. Vol. 12. Pp. 1705—1716.

66. *Zu-Qing Qu.* Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis // Springer Publications 2004. ISBN: 1852338075.

67. *Guyan R. J.* Reduction of Stiffness and Mass Matrices // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. No. 2. P. 380.

68. *Chen S.-H., Pan H. H.* Guyan reduction // Communications in Applied Numerical Methods. 1988. Vol. 4. Pp. 549—556.

69. *Benfield W. A., Hruda R. F.* Vibration analysis of structures by component mode substitution // AIAA Journal. 1971. Vol. 9. No. 7. Pp. 1255—1261.

70. *Игнатьев В. А., Ромашкин В. Н.* Определение редуцированного спектра частот и форм свободных колебаний систем с большим числом степеней свободы на основе сплайн-коллокационной конденсации // Вестник ВолгГАСУ. Сер.: Строительство и архитектура. 2014. Вып. 35(54). С. 140—152.

71. *Lu X.* Simplified dynamic condensation in multi-substructure systems // Computers and Structures. 1988. Vol. 30. No. 4. Pp. 851—854.

72. *Q'Callahan J. C.* A procedure for an improved reduced system (IRS) model // Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Union College, Schenectady. 1989. NY. Pp. 17—21.

73. *Blair M. A., Camino T. S., Dickens J. M.* An Iterative Approach to a Reduced Mass Matrix // Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference (Florence, Italy), Union College. NY. 1991. Pp. 621—626.

74. *Friswell M. L., Garvey S. D., Penny J. E.* Model Reduction Using Dynamic and Iterated IRS Techniques // Journal of Sound and Vibration. 1995. Vol. 186. No. 2. Pp. 331—323.

75. *Xia Y., Lin R. M.* Improvement on the iterated IRS method for structural eigensolutions // Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 270. No. 4—5. Pp. 713—727.

76. *Wilson E. L., Yuan M. W., Dickens J. M.* Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1982.

77. *Nour-Omid B., Clough R. W.* Dynamic Analysis of structures using Lanczos coordinates // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1984.

78. *Leger, Wilson E. L., Clough R. W.* The use of load dependent vectors for dynamic and earth-quake analyses // Earthquake Engineering Research Center report, Univesity of California. Berkley. 1986.

79. *O'Callahan J. C., Avitabile P. A., Riemer R.* System equivalent reduction expansion process (SEREP) // Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference. (Las Vegas, Nevada), Unuin College, NY, 1989. Pp. 29—37.

80. *Kammer D. C.* Test-analysis model development using an exact modal reduction // International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis. 1987. Pp. 174—179.

81. *Игнатьев В. А.* Редукционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1992. 144 с.

82. *Игнатьев В. А., Игнатьева О. М.* Новый вариант энергетического варианта метода частотно-динамической конденсации в задачах на собственные значения // Численные методы решения задач строительной механики, теории упругости и пластичности: Тезисы докладов. Волгоград: Волгоград. инж.-строит. ин-т, 1990. С. 3—5.

83. *Игнатьев В. А., Макаров А. В., Сухин К. А.* Расчет стержневых систем на основе энергетического варианта метода частотно-динамической конденсации с использованием собственных векторов подсистем // Гор. агломерации на оползневых территориях: Материалы междунар. научн. конф., Волгоград, 2003. Волгоград : ВолгГАСА, 2003. Ч. I. С. 113—120.

84. *Игнатьев В. А., Макаров А. В., Сухин К. А.* Новый вариант метода частотно-динамической конденсации со статической подготовкой в форме метода перемещений // Известия вузов Сев. Кав. регион. Сер. Техн. науки. 2004. Приложение № 2. С. 42—45.

85. *Koutsovasillis P.* Model Order Reduction in Structural Mechanics. Coupling the rigid and elastic multi body dynamics. Dresden Technical University. Dissertation. 2009.

86. *Xia Y., Lin R. M.* A New Iterative Order Reduction (IOR) Method for Eigensolutions of Large Structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2004. Vol. 59. No. 1. Pp. 153—172.

87. Расчет тонкостенных пространственных конструкций пластинчатой и пластинчато-стержневой структуры / В. А. Игнатьев, О. Л. Соколов, И. Альтенбах, В. Киссинг. М. : Стройздат, 1996. 560 с.

88. *Макаров А. В.* Применение и развитие метода частотно-динамической конденсации для решения задач о свободных колебаниях систем с большим числом степеней свободы: дис…канд. техн. наук. Волгоград, 1993. 149 с.

89. *Choi J. H., Kim H., Cho M.* Iterative method for dynamic condensation combined with substructuring scheme // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 317. No. 1. Pp. 199—218.

90. *Liu Z.-S., Wu Z.-G.* Iterative-Order-Reduction Substructuring Method for Dynamic Condensation of Finite Element Models // AIAA JOURNAL. 2011. Vol. 49. No. 1. Pp. 87—96.

91. *Seshu P.* Substructuring and Component Mode Synthesis. Review // Shock and Vibration. 1997. Vol. 4. No. 3. Pp. 199—210.

92. Многоуровневые методы исследования сложных упругих систем / А. С. Вольмир, В. Ф. Михнев, В. Н. Терских, А. Б. Тихомиров // Проблемы устойчивости и предельной несущей способности конструкций: Межвузовский тематический сб. тр. ЛИСИ. Л. : ЛИСИ, 1983. С. 25—34.

93. *Вольмир А. С., Терских В. Н.* Исследование динамики конструкций из композитных материалов на основе метода суперэлементов // Механика композитных материалов. 1979. № 4. С. 652—655.

94. *Вольмир А. С., Куранов Б. А., Турбаивский А. Т.* Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. М. : Машиностроение, 1989. 248 с.

95. *Шмаков В. П.* Метод синтеза динамических характеристик упругих модульных конструкций // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. 1991. № 1. С. 4—10.

96. *Лиходед А. И.* О сходимости метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 180—188.

97. *Ивантеев В. И., Чубань В. Д.* Расчет частот и форм свободных колебаний конструкции методом многоуровневой динамической конденсации // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. 15. № 4. С. 81—82.

98. *Дмитриев С. Н.* О частотном критерии в методе синтеза форм колебаний // Динамика систем и конструкций. Труды МГТУ им. Н. Э. Баумана. № 545. М. : МГТУ, 1990. С. 51—69.

99. *Григорьев В. Г.* Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем: дис… д-ра техн. наук. М., 2000. 328 с.

100. *Белостоцкий А. М., Дубинский С. И., Потапенко А. Л.* Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2006. № 6. С. 45.

101. *Белостоцкий А. М., Потапенко А. Л.* Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2011. Vol. 7. № 1. Pp. 76—84.

102. *Hurty W. C.* Dynamic analysis of structural systems using component modes // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. No. 4. Pp. 678—685.

103. *Craig R., Bampton M.* Coupling of Substructures for Dynamic Analysis // Am. Inst. Aero. Astro. J. 1968. Vol. 6. No. 7. Pp. 1313—1319.

104. *Craig R., Chang C.-J.* Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis // AIAA Journal. 1976. Vol. 14. No. 11. Pp. 1633—1635.

105. *Goldman R. L.* Vibration analysis by dynamic partitioning // AIAA Journal. 1969. Vol. 7. No. 6. Pp. 1152—1154.

106. *Hou S. N.* Review of modal synthesis techniques and a new approach // The Shock and Vibration Bulletin. 1969. No. 40. Pp. 25—39.

107. *Rubin S.* Improved component-mode representation for structural dynamic analysis // AIAA Journal. 1975. Vol. 13. No. 8. Pp. 995—1006.

108. *Irretier H.* A modal synthesis method with free interfaces and residual flexibility matrices for frame structures // Stavebnicky asopis. 1989. Vol. 37. No. 9. Pp. 601—610.

109. *MacNeal R. H.* A hybrid method of component mode synthesis // Computers and Structures. 1971. Vol. 1. No. 4. Pp. 581—601.

110. *Curnier A.* On three modal synthesis variants // Journal of Sound and Vibration. 1983. Vol. 90. No. 4. Pp. 527—540.

111. *Jezequel L., Seito H. D.* Component modal synthesis methods based on hybrid models. Part II. Numerical tests and experimental identification of hybrid models // Transactions ASME. Journal of Applied Mechanics. 1994. Vol. 61. No. 1. Pp. 109—116.

112. *Hale A. L., Meirovitch L.* A General Substructures Synthesis Method for Dynamic Simulation of Complex Structures // Journal of Sound and Vibration. 1980. Vol. 69. Pp. 309—326.

113. *Morosow G., Abbott P.* Mode selection // Synthesis of Vibrating Systems / Ed. Neubert V. H., Raney J. P. New York: ASME, 1971. Pp. 72—77.

114. *Hintz R. M.* Analytical methods in component modal synthesis // AIAA Journal. 1975. Vol. 13. No. 8. Pp. 1007—1016.

115. *Kuhar E. J., Stahle C. V.* Dynamic transformation method for modal synthesis // AIAA Journal. 1974. Vol. 12. No. 5. Pp. 672—678.

116. *Ookuma M., Nagamatsu A.* Vibration Analysis by Multiple Component Mode Synthesis Method // Bulletin of JSME. 1984. Vol. 27. Pp. 1288—1293.

117. *Ookuma M., Nagamatsu A.* Comparison of Component Mode Synthesis with MSC-NASTRAN // Bulletin of JSME. 1984. Vol. 27. Pp. 1294—1298.

118. *Bennighof J. K.* Adaptive multi-level substructuring method for acoustic radiation and scattering from complex structures // Computational methods for Fluid/Structure Interaction, A. J. Kalinowski, Ed. 1993. Vol. 178. AMSE, New York, pp. 25—38.

119. *Bennighof J. K., Lehoucq R. B.* An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics // SIAM Journal on Scientific Computing. 2004. Vol. 25. Pp. 2084—2106.

120. *Hetmaniuk U. L., Lehoucq R. B.* Multilevel methods for eigenspace computations in structural dynamics // Proc. 16th Int. Conf. Domain Decomposition Methods. New York. 2005.

121. An Implementation and evaluation of the AMLS Method for Sparse EigenValue Problems / Gao W, Li X. S., Yang C., Bai Z. // ACM Transactions on Mathematical Software. 2007. Vol. 6. No. N. Pp. 1—27.

122. *Kim C. W.* Analysis of vibration levels of large structural system with recursive component mode synthesis method: theory and convergence // Proc. IMechE. Part C: J. Mechanical Engineering Science. 2006. Vol. 220. No. 9. Pp. 1339—1345.

123. *Kim C. W., Jung S. N., Choi J. H.* Automotive structure vibration with component mode synthesis on a multi-level // International Journal of Automotive Technology. 2008. Vol. 9. No. 1. Pp. 119—122.

124. *Бернштейн С. А.* Новый метод вычисления колебаний упругих систем. М. : ВИА РККА. 1939.

125. *Бернштейн С. А.* Новый метод вычисления частот колебаний упругих систем и его приложение к задачам устойчивости // Труды ВАММ Красной Армии. Юбилейный сборник. М. 1940.

126. *Бернштейн С. А.* Основы динамики сооружений. М. : Госстройиздат, 1941. 188 с.

127. *Смирнов А. Ф.* Статическая и динамическая устойчивость сооружений. М. : Трансжелдориздат, 1947.

128. *Смирнов А. Ф.* Устойчивость и колебания сооружений. М. : Трансжелдориздат, 1958.

129. *Lord Rayleigh.* Theory of Sound. London, 1894.

130. *Дж. Стретт (Лорд Релей).* Теория звука. Т. 1. ГТИИ. 1940.

131. *Релей*. Теория звука. Т. 1 и 2. Гостехиздат, 1956.

132. *Сегаль А. Н.* Высотные здания и сооружения. Расчет на прочность, жесткость и устойчивость. М. : Стройиздат, 1949.

133. *Макушин В. М.* Эффективное применение энергетического метода исследования устойчивости стержней и пластин // Расчеты на прочность. М. : Машгизд, 1962. Вып. 8. С. 225—252.

134. *Игнатьев В. А., Шашков С. М.* Динамика сооружений. Волгоград : Волгоградский политехн. ин-т, Волгогизд, 1988. 83 с.

135. *Zemljanuchin S. J.* Vereinfachte Berechnung der Eigenschwingungsfrequenz Von Spindeln an Werkzingmashinen. "Undustrie-Anzligez". Essen, 82 Jahzgang. 1960. № 10.2.

136. *Землянухин С. Я.* Упрощенный расчет собственных колебаний шпинделей // Станки и инструмент. 1959. № 12.

137. *Землянухин С. Я.* Изгибные колебания валов переменного сечения: дисс… канд. тех. наук. Саратов, 1962.

138. *Игнатьев В. А., Игнатьева О. М.* Устойчивость сооружений (приближенные методы). Волгоград : Изд-во Волгоградского политех. ин-та, 1986. 113 с.

139. *Гриненко Н. И., Мокеев В. В.* О задачах исследований колебаний конструкций методом конечных элементов // Прикладная механика. 1985. № 3. С. 25—30.

140. *Пржемницкий Е. С.* Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур // Ракетная техника и космонавтика. 1963. № 1.

141. Метод суперэлементов в расчетах прочности судовых конструкций / В. А. Постнов, С. А. Дмитриев, Б. К. Елтышев, А. А. Родионов. Судостроение, 1975.

142. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / В. А. Постнов, С. А. Дмитриев, Б. К. Елтышев, А. А. Родионов. Судостроение, 1979.

143. *Постнов В. А., Москалев А. Н.* О применении метода подструктур для определения и разделения корней частотного уравнения консервативных систем // Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 3. С. 94—96.

144. *Вороненок Е. Я., Сочинский С. В.* Интерполяционное редуцирование матриц жесткости при решении задач строительной механики методом суперэлементов // Прикладная механика. 1981. Т. 17. № 6. С. 114—118.

145. *Вороненок Е. Я., Палий О. М., Сочинский С. В*. Редуцированные элементы в расчетах прочности и вибрации судов // Судостроение. 1984. № 11. С. 9—13.

146. *Вороненок Е. А., Палий О. М., Сочинский С. В.* Метод редуцированных элементов для расчета конструкций. Л. : Судостроение, 1990. 224 с.

147. *Рудых О. Л.* Совершенствование метода редуцированных элементов // Тез. региональной научно-техн. конф. по МННТИ «Дальный Восток России». Хабаровск: ХГТУ, 1995. С. 196.

148. *Рудых О. Л.* Совершенствование метода редуцированных элементов на основе синтеза с методом суперэлементов // Изв. вузов. Строительство. 2006. № 7. С. 103—108.

149. *Рудых О. Л.* Метод частотно-динамического редуцирования // Бюллетень научных сообщений №11 : сб. науч. тр. Хабаровск : ДВГУПС, 2006. С. 4—8.

150. *Шмаков В. П.* Построение корректирующих функций в методе Бубнова — Галеркина // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 2. С. 80—92.

151. *Шмаков В. П.* Аппроксимация гармонического отклика упругой конечно-мерной системы в зависимости от частотного диапазона внешнего воздействия // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. 1995. № 2. С. 96—110.

152. Динамическое нагружение пилотируемых космических станций сложной пространственной компоновки / А. В. Анисимов, В. В. Забудкин, А. И. Лиходед, Д. А. Пономарев // Космонавтика и ракетостроение. 1998. Вып. 13. С. 130—140.

153. Методика расчета динамических нагрузок на сложные ракетные конструкции с выделением квазистатических составляющих / А. В. Анисимов, В. Н. Выломов, В. В. Забудкин, А. И. Лиходед, Д. А. Пономарев // Космонавтика и ракетостроение. 1995. Вып. 4. С. 95—107.

154. *Игнатьев В. А*. Методы супердискретезации в расчетах сложных стержневых систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. 108 с.

155. *Белостоцкий А. М., Сутурин И. М.* Суперэлементное моделирование статического и динамического НДС многоэтажных панельных зданий // Сб. научн. трудов МГСУ № 5 «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». М., 2002. С. 57—69.

156. *Белостоцкий А. М., Васильев С. Л., Сидоров А. В.* Параллельные вычисления в решении большеразмерных задач, освоение возможностей лидирующих программных комплексов и собственные разработки // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010. Vol. 6. № 1—2. Pp. 65—66.

157. *Бурман З. И., Артюхин Г. А., Зархин Б. Я.* Программное обеспечение матричных алгоритмов и метода конечных элементов в инженерных расчетах. М. : Машиностроение, 1988. 256 с.

158. *Сапожников А. И.* Методы суперэлементов в статике и динамике панельных зданий. Строительство и архитектура. 1980. С. 33—37.

159. *Зубко А. М.* Использование синтеза форм колебаний в методе суперэлементов для решения задач о колебаниях конструкций. М. : МФТИ. Деп. в ВИНИТИ №6358 – В86. 12 с.

160. *Демидов Г. В,. Кривцов Ю. В.* Расчет частот и форм свободных колебаний стержневых конструкций методом суперэлементов // МКЭ в некоторых задачах численного анализа. 1984. С. 31—35.

161. *Шакирзянов Р. А.* Суперэлементный метод сил в расчетах на собственные колебания комбинированных конструкций: дис… канд. тех. наук. Казань, 1989. 155 с.

162. *Немчинов Ю. И., Козырь А. А.* Использование конденсации динамических переменных в методе пространственных конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 1985. № 1. С. 10—13.

163. *Матевосян Р. Р.* Некоторые приложения качественной теории колебаний упругих стержневых систем с бесконечно большим числом степеней свободы // Исследования по теории сооружений. М., 1962. Вып. XI. С. 25—29.

164. *Клюев Ю. И., Соколов В. Ф.* Определение собственных частот и форм колебаний составных конструкций // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. 1973. С. 28—33.

165. *Мокеев В. В.* О задаче нахождения собственных значений и векторов больших матричных систем // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. Т. 32. № 10. 1992. С. 1652—1657.

166. *Мокеев В. В., Фот Е. Я.* Метод частотной конденсации — эффективный подход в решении задач динамики конструкций. Челябинский гос. тех. ун-т, 1998.

167. *Гусеев С. С., Куранов Б. А.* Особенности применения метода суперэлементов в задачах устойчивости и свободных колебаний // Тр. XIV Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси, 20—23 октября 1987. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1987. Т. 1. С. 445—449.

168. *Игнатьев В. А., Игнатьева О. М.* Применение метода частотно-динамической конденсации к решению неполной алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов // Конкретные задачи и их применение в строительном производстве: Тез. докл. Волгоград, 1987. С. 57—69.

169. *Игнатьев В. А., Макаров А. В.* Новый вариант частотно-динамической конденсации с покомпонентным синтезом собственных форм // Численные методы решения задач строительной механики, теории упругости и пластичности. Тез. докл. Волгоград, 1990. С. 53.

170. *Игнатьев В. А., Макаров А. В.* Решение неполной алгебраической проблемы по методу последовательной частотно-динамической конденсации. Волгоград. 1991. Деп. в ВИНИТИ 18.02.91. № 803-В91. 25 с.

171. *Катеринин К. В.* Развитие и применение метода последовательной частотно-динамической конденсации к решению задач устойчивости сложных систем: дис… канд. техн. наук. Волгоград, 2000. 108 с.

172. *Сухин К. А.* Развитие и применение энергетического варианта метода частотно-динамической конденсации для решения неполной проблемы собственных значений и собственных векторов в динамике сооружений: дис… канд. техн. наук. Волгоград, 2004. 134 с.

173. *Игнатьвев В. А., Макаров А. В.* Решение неполной алгебраической проблемы собственных векторов и собственных значений для задач динамики и устойчивости методом частотно-динамической конденсации // Строительная механика и расчет сооружений. 2005. № 1. С. 14—20.

174. *Игнатьев В. А., Ромашкин В. Н.* Последовательная частотно-динамическая конденсация: Материалы научно-технической Интернет-конференции. ВолгГАСУ, Михайловка, 2010. С. 62—85. URL: http://sfvolggasu.ru/images/foto/study/nauchnie_confirinsii/conf2010/conf2010.doc

175. *Игнатьев В. А., Чантуридзе А. У.* Метод частотно-динамической конденсации // Вестник Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архит. 2011. Вып. 24(43). С. 46—53.

176. *Игнатьев В. А.* Модифицированный метод последовательной частотно-динамической конденсации // Academia. Архитектура и строительство. 2011. № 2. С. 100—103.

177. *Ромашкин В. Н.* Суперэлементная формулировка метода частотно-динамической конденсации // Интернет-Вестник ВолгГАСУ. 2013. № 1 (25). Ст. 8. URL: http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1%2825%29.pdf.

178. *Карпов Д. В.* Развитие метода редуцированных элементов для расчета регулярных стержневых систем и анализа плоских температурных полей: дис... канд. техн. наук. Владивосток, 2002. 209 с.

179. *Игнатьев В. А., Игнатьева О. М.* Метод разреженных сеток и его применение в расчете стержневых систем с большим числом узлов // Исследования по строительной механике, теория упругости и пластичности. Саратов, 1979. № 8. С. 55—79.

180. *Voss H., Yin J., Chen P.* Preconditioning Subspace Iteration for Large Eigenvalue Problems with Automated Multi-Level Sub-structuring // Proc. Conference on Applied Linear Algebra — in honor of Ivo Marek, Prague 2013. Pp. 1—20.

1. *Galishnikova V. V., Ignat'ev V. A.* Regulyarnye sterzhnevye sistemy (Teoriya i metody rascheta). Volgograd : VolgGASU, 2006. 552 s.
2. *Fialko C. Yu.* Agregatnyi mnogourovnevyi metod resheniya konechno-elementnykh zadach stroitel'noi mekhaniki: dis… d-ra tekhn. nauk. Kiev, 2003.
3. *Wilkinson J. H.* The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford University Press, 1965.
4. *Parlett B. N.* The Symmetric Eigenvalue Problem. 2nd ed., SIAM, Philadelphia, 1997.
5. *Cuppen M. J.* A divide and conquer method for the symmetric tridiagonal eigenproblem // Numer. Math. 1981. Vol. 36. Pp. 177——195.
6. *Bischof C., Van Loan C.* The WY representation for products of Householder matrices // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1987. Vol. 8. Pp. 2—13.
7. *Dhillon I. S.* A New $O(n^2)$ Algorithm for the Symmetric Tridiagonal Eigenvalue/Eigenvector Problem Ph.D. thesis. Berkley CA, 1997; available as UC Berkeley Technical report UCB//CSD-97-971.
8. *Dhillon I. S., Parlett B. N.* Multiple representations to compute orthogonal eigenvectors of symmetric tridiagonal matrices // Linear Algebra Appl. 2004. № 387. Pp. 1—28.
9. *Bate K., Vilson E.* Chislennye metody analiza i metod konechnykh ellementov / per. s angl. M. : Stroiizdat, 1982.
10. *Bathe K. J., Wilson E. L.* Large eigenvalue problems in dynamic analysis // ASCE, Journal of Engineering Mechanics. 1972. 98. Pp. 1471—1485.
11. *Wilson E. L., Iton T.* An eigensolution strategy for large systems // Computers and Structures. 1983. Vol. 16. № 1—4. Pp. 259—265.
12. *Wilson E. L.* Three dimensional dynamic analysis of structures // Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, USA, 1996.
13. *Yamamoto Y., Ohtsubo H.* Subspace iteration accelerated by using Chebyshev polynomials for eigenvalue problems with symmetric matrices // International Journal for Numerical Method in Engineering. 1976. Vol. 10. Pp. 935—944.
14. *Bathe K. J., Ramaswamy J.* An accelerated subspace iteration method // Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 1980. Vol. 23. Pp. 313—331.
15. *Zhao Q. C., Chen P., Peng W. B.,Gong Y. C.,Yuan M. W.* Accelerated subspace iteration with aggressive shift // Computers & Structures. 2007. Vol. 85. Pp. 1562—1587.
16. *Jung H. J., Kim M., Lee I.* An Improved Subspace Iteration Method with shift for structures with multiply natural frequencies // Computers and Structures. 1999. Vol. 70. № 6. Pp. 625—633(9).
17. *Jia Z.* A refined subspace iteration algorithm for large sparse eigenproblems // Appl. Numer. Math. 2000. Vol. 32. Pp. 35—52.
18. *Cheu T. C., Johnson C. P., Craig R. R.* Computer algorithms for calculating efficient initial vectors for subspace iteration method // International Journal for Numerical Methods in Engineering.1987. Vol. 24. Pp. 1841—1848.
19. *Qian Y., Dhatt G.* An accelerated subspace iteration method for generalized eigenproblems // Computers and Structures. 1995. Vol. 54. Pp. 1127—1134.
20. *Nguyen D. T., Arora J. S.* Eigensolution for large structural systems with sub-structures // Int. J. Numer. Meth. Engrg. 1980. Vol. 4. Pp. 333—341.
21. *Lu X., Lin J. H., Zhong W. X.* Subspace iteration method in multi-level substructure systems // Computers and Structures. 1989. Vol. 33. Pp. 459—462.
22. *Leo R., Mazolli M.* Multilevel Dynamic Substructure Iteration Method // Nuclear Engineering and Design. Amsterdam. 1989. Vol. 111. Pp. 251—254.
23. *Lanczos C.* An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // J. Res. Nat. Bur. Stand. V. Vol. 45. Pp. 255—281.
24. *Kaniel S.* Estimates for some computational techniques in linear algebra // Math. Comput. 1966. Vol. 20. № 95. Pp. 369—378.
25. *Saad Y.* On the rates of convergence of the Lanczos and the block-Lanezos methods // SIAM J. Nurner. Anal. 1980. Vol. 17. № 5. Pp. 687—706.

26. *Paige S. S.* The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large sparse matrices. Ph. D. thesis. University of London, 1971.

27. *Parlett B. N.* The symmetric Eigenvalue Problem. University of California, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1980.

28. *Scott D. S.* The Lanczos algorithm // In Duff (1981b). Pp. 139—159.

29. *Parlett B. N., Scott D. S.* Lanczos algorithm with selective orthogolization // Math. Comp. 1979. Vol. 33. Pp. 217—238.

30. *Simon H.* The Lanczos algorithm with partial reorthogonalization // Math. Comp. 1984. Vol. 42. Pp. 115—136.

31. *Fialko S. Yu., Kriksunov E. Z., Karpilovsky V. S.* A block Lanczos method with spectral transformations for natural vibrations and seismic analysis of large structures in SCAD software // CMM-2003 — Computer Methods in Mechanics, June 3—6, 2003, Gliwice, Poland. Pp. 129—130.

32. *Golub G. H., Underwood R. R.* The block Lanczos method for computing eigenvalues // In Mathematical Software III, ed. by J. R. Rice, Academic Press: New York, 1977. Pp. 364—377.

33. *Ruhe A*. Implementation aspects of band Lanczos algorithm for computation of eigenvalues of large sparse matrices // Math. Comput. 1979. Vol. 33. No. 146. Pp. 680—687.

34. *Cullum J., Donath W. E.* A block Lanczos algorithm for computing the q algebraically largest eigenvalues and a corresponding eigenspace of large sparse real symmetric matrices // Proc. of the 1974 IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, 1974.

35. *Grimes R. G., Lewis J. G., Simon H. D.* A shifted Block Lanczos Algorithm for Solving Sparse Symmetric Generalized Eigenproblems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1994. V. 15. No. 1. Pp. 1—45.

36. *Fialko S. Yu.* Sopostavlenie pryamykh i iteratsionnykh metodov resheniya bol'shikh konechno-elementnykh zadach stroitel'noi mekhaniki // A. V. Perel'muter, V. I. Slivker. Raschetnye modeli sooruzhenii i vozmozhnost' ikh analiza. Kiev : Stal', 2002. S. 552—569.

37. *Fialko C. Yu.* Pryamye metody resheniya sistem lineinykh uravnenii v sovremennykh MKE-kompleksakh. M. : SKAD-Soft, 2009. 160 s.

38. *Yakushev V. L., Simbirkin V. N., Filimonov A. V.* Reshenie bol'sherazmernykh zadach stroitel'noi mekhaniki metodom konechnykh elementov v programmnom komplekse STARK ES // Teoriya i praktika rascheta zdanii, sooruzhenii i elementov konstruktsii. Analiticheskie i chislennye metody. Sb. trudov mezhdunarodnoi nauchno-praktich. konf. MGSU, 2010. S. 516—526.

39. *Fialko S. Yu.* High-performance iterative and sparse direct solvers in Robot software for static and dynamic analysis of large-scale structures // Proceedings of the second European conference on computational mechanics, Cracow, Poland, June 26—29. 2001. 18 p.

40. *Feng Y. T.* An integrated Davidson and multigrid solution approach for very large scale symmetric eigenvalue problems // Comput. Meths. Appl. Mech. Eng. 1999. No. 190. Pp. 3543—3563.

41. *Papadrakakis M.* Solving large — scale problems in mechanics. John Wiley & Sons Ltd., 1993.

42. *Hestenes M. R., Stiefel E.* Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems // J. Res. Natl. Bur. Stand. 1952. Vol. 49. Pp. 409—436.

43. *Knyazev A. V.* Toward the optimal preconditioned eigensolver: locally optimal block preconditioned conjugate gradient method // SIAM J. Sci. Comput. 2001. V. 23. No. 2. Pp. 517—541.

44. *Jang H.-J.* Preconditioned conjugate gradient method for large generalized eigenproblems // Trends in Mathematics Information Center for Mathematical Sciences. 2001. Vol. 4. No. 2. Pp. 103—109.

45. *Cho Y., Yong Y.-K.* A multi-mesh, preconditioned conjugate gradient solver for eigenvalue problems in finite element models // Computers & Structures. 1996. Vol. 58. No. 3. Pp. 575—583.

46. *Meijerink J. A., Van der Vorst H. A*. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix // Math. Comp. 1977. Vol. 31. Pp. 148—162.

47. *Smith C., Wait R., Addison C.* The effectiveness of drop-tolerance based incomplete cholesky preconditioners for the conjugate gradient method // Numerical Analysis. 1996. Vol. 75. Pp. 325—344.

48. *Ajiz M. A., Jennings A.* A robust incomplete Choleski-conjugate gradient algorithm // Int. j. numer. methods eng., 1984. Vol. 20. Pp. 949—966.

49. *Suarjana M., Kincho Law H.* A robust incomplete factorization based on value and space constrains // International Journal for Numerical Methods In Engineering. 1995. Vol. 38. Pp. 1703—1719.

50. *Kaporin I. E.* High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its UTU+UTR+RTU-decomposition // Numerical Linear Algebra with Applications. 1998. Vol. 5. Pp. 483—509.

51. *Benzi M., Tuma M.* A robust incomplete factorization preconditioner for positive definite matrices // Numer Linear Algebra Appl. 2001. Vol. 99. Pp. 1—20.

52. *Ruge J. W., St¨uben K.* Multigrid methods // SIAM, Philadelphia. Frontiers in Applied Mathematics. 1987. Vol. 3. Pp. 73—130.

53. *Schwarz H. R.* The eigenvalue problem Ax = λBx for symmetric matrices of high order // Comp. Methods App. Mech. Engg. 1974. No. 3. Pp. 11—28.

54. *Schwarz H. R.* Two algorithms for treating Ax = λBx // Comput. Meths. Appl. Mech. Eng. 1977. No. 12. Pp. 181—199.

55. *Vanek P., Mandel J., Brezina M.* Algebraig multigrid based on smoothed aggregation for second and fourth order problems // Computing. 1996. Pp. 179—196.

56. *Bulgakov V. E., Belyi M. E., Mathisen K. M.* Multilevel aggregation method for solving large-scale generalized eigenvalue problems in structural dynamics // Int. J. Numer. Methods Eng. 1997. Vol. 40. Pp. 453—471.

57. *Saad Y., Suchomel B.* ARMS: An algebraic recursive multilevel solver for general sparse linear systems // Numerical Linear Algebra with Applications. 2002. Vol. 9. No. 5. Pp. 359—378.

58. *Pereira F. H., Verardi S. L. L., Nabeta S. I.* A fast algebraig multigrid preconditioned conjugate gradient solver // Appl. Math. And Comp. 2006. Vol. 179. Pp. 344—351.

59. *Kaporin I. E., Milyukova O. Yu*. Predobuslovlivanie iteratsionnykh metodov dlya effektivnogo massivno-parallel'nogo resheniya sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii // Trudy XIII Mezhdunarodnogo seminara «Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie», 3—7 oktyabrya 2011 g., g. Sarov, 2012. S. 243—252.

60. *Kaporin I. E., Milyukova O. Yu., Bartenev Yu. G.* Massivno-parallel'nye predobuslovlennye iteratsionnye metody resheniya standartnykh zadach lineinoi algebry // Rossiiskii federal'nyi yadernyi tsentr — Vserossiiskii NII yadernoi fiziki. Sarov, 2013.

61. *Kharchenko S. A*. Vliyanie rasparallelivaniya vychislenii s poverkhnostnymi mezhprotsessornymi granitsami na masshtabiruemost' parallel'nogo iteratsionnogo algoritma resheniya sistem lineinykh uravnenii na primere vychislenii vychislitel'noi gidrodinamiki // Materialy mezhdunarodnoi nauch. konf. «Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii PAVT 2008».

62. Reshenie plokhoobuslovlennykh simmetrichnykh SLAU dlya zadach stroitel'noi mekhaniki parallel'nymi iteratsionnymi metodami / V. L. Yakushev, V. N. Simbirkin, A. V. Filimonov, P. A. Novikov, I. N. Kon'shin, G. B. Sushko, S. A. Kharchenko // Trudy Mezhdunarodnoi superkomp'yuternoi konferentsii «Nauchnyi servis v seti Internet: ekzaflopsnoe budushchee», 19—24 sentyabrya 2011 g., g. Novorossiisk. M. : MGU, 2011. S. 333—342.

63. *Kon'shin I. N., Sushko G. B., Kharchenko S. A.* Trekhurovnevaya MPI-TBB-CUDA parallel'naya realizatsiya blochnogo iteratsionnogo algoritma resheniya SLAU dlya melkoblochnykh nestrukturirovannykh razrezhennykh matrits // Trudy Mezhdunarodnoi superkomp'yuternoi konferentsii (17—22 sentyabrya 2012 g., g. Novorossiisk). M. : MGU, 2012. 752 s.

64. Autodesk robot structural analysis. Rukovodstvo pol'zovatelya. Teoreticheskaya baza metodov dinamicheskogo rascheta konstruktsii. URL: http://docs.autodesk.com/RSA/2013/RUS/filesROBOT/GUID-CBD64D76-847E-4CFC-A366-674F04CCC4D5.htm. Data obrashcheniya: 09.11.2014.

65. *Leung Y. T.* An accurate method of dynamic condensation in structural analysis // Int. J. Num. Meth. Engng. 1978. Vol. 12. Pp. 1705—1716.

66. *Zu-Qing Qu.* Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis // Springer Publications 2004. ISBN: 1852338075.

67. *Guyan R. J.* Reduction of Stiffness and Mass Matrices // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. No. 2. P. 380.

68. *Chen S.-H., Pan H. H.* Guyan reduction // Communications in Applied Numerical Methods. 1988. Vol. 4. Pp. 549—556.

69. *Benfield W. A., Hruda R. F.* Vibration analysis of structures by component mode substitution // AIAA Journal. 1971. Vol. 9. No. 7. Pp. 1255—1261.

70. *Ignat'ev V. A., Romashkin V. N.* Opredelenie redutsirovannogo spektra chastot i form svobodnykh kolebanii sistem s bol'shim chislom stepenei svobody na osnove splain-kollokatsionnoi kondensatsii // Vestnik VolgGASU. Ser.: Stroitel'stvo i arkhitektura. 2014. Vyp. 35(54). C. 140—152.

71. *Lu X.* Simplified dynamic condensation in multi-substructure systems // Computers and Structures. 1988. Vol. 30. No. 4. Pp. 851—854.

72. *Q'Callahan J. C.* A procedure for an improved reduced system (IRS) model // Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Union College, Schenectady. 1989. NY. Pp. 17—21.

73. *Blair M. A., Camino T. S., Dickens J. M.* An Iterative Approach to a Reduced Mass Matrix // Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference (Florence, Italy), Union College. NY. 1991. Pp. 621—626.

74. *Friswell M. L., Garvey S. D., Penny J. E.* Model Reduction Using Dynamic and Iterated IRS Techniques // Journal of Sound and Vibration. 1995. Vol. 186. No. 2. Pp. 331—323.

75. *Xia Y., Lin R. M.* Improvement on the iterated IRS method for structural eigensolutions // Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 270. No. 4—5. Pp. 713—727.

76. *Wilson E. L., Yuan M. W., Dickens J. M.* Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1982.

77. *Nour-Omid B., Clough R. W.* Dynamic Analysis of structures using Lanczos coordinates // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1984.

78. *Leger, Wilson E. L., Clough R. W.* The use of load dependent vectors for dynamic and earth-quake analyses // Earthquake Engineering Research Center report, Univesity of California. Berkley. 1986.

79. *O'Callahan J. C., Avitabile P. A., Riemer R.* System equivalent reduction expansion process (SEREP) // Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference. (Las Vegas, Nevada), Unuin College, NY, 1989. Pp. 29—37.

80. *Kammer D. C.* Test-analysis model development using an exact modal reduction // International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis. 1987. Pp. 174—179.

81. Ignat'ev V. A. Reduktsionnye metody rascheta v statike i dinamike plastinchatykh sistem. Saratov : izd-vo Sarat. un-ta, 1992. 144 s.

82. *Ignat'ev V. A., Ignat'eva O. M.* Novyi variant energeticheskogo varianta metoda chastotno-dinamicheskoi kondensatsii v zadachakh na sobstvennye znacheniya // Chislennye metody resheniya zadach stroitel'noi mekhaniki, teorii uprugosti i plastichnosti: Tezisy dokladov. Volgograd: Volgograd. inzh.-stroit. in-t, 1990. S. 3—5.

83. *Ignat'ev V. A., Makarov A. V., Sukhin K. A.* Raschet sterzhnevykh sistem na osnove energeticheskogo varianta metoda chastotno-dinamicheskoi kondensatsii s ispol'zovaniem sobstvennykh vektorov podsistem // Gor. aglomeratsii na opolznevykh territoriyakh: Materialy mezhdunar. nauchn. konf., Volgograd, 2003. Volgograd : VolgGASA, 2003. Ch. I. C. 113—120.

84. *Ignat'ev V. A., Makarov A. V., Sukhin K. A.* Novyi variant metoda chastotno-dinamicheskoi kondensatsii so staticheskoi podgotovkoi v forme metoda peremeshchenii // Izvestiya vuzov Sev. Kavk. region. Ser. Tekhn. nauki. 2004. Prilozhenie № 2. S. 42—45.

85. *Koutsovasillis P.* Model Order Reduction in Structural Mechanics. Coupling the rigid and elastic multi body dynamics. Dresden Technical University. Dissertation. 2009.

86. *Xia Y., Lin R. M.* A New Iterative Order Reduction (IOR) Method for Eigensolutions of Large Structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2004. Vol. 59. No. 1. Pp. 153—172.

87. Raschet tonkostennykh prostranstvennykh konstruktsii plastinchatoi i plastinchato-sterzhnevoi struktury / V. A. Ignat'ev, O. L. Sokolov, I. Al'tenbakh, V. Kissing. M. : Stroizdat, 1996. 560 s.

88. *Makarov A. V.* Primenenie i razvitie metoda chastotno-dinamicheskoi kondensatsii dlya resheniya zadach o svobodnykh kolebaniyakh sistem s bol'shim chislom stepenei svobody: dis…kand. tekhn. nauk. Volgograd, 1993. 149 s.

89. *Choi J. H., Kim H., Cho M.* Iterative method for dynamic condensation combined with substructuring scheme // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 317. No. 1. Pp. 199—218.

90. *Liu Z.-S., Wu Z.-G.* Iterative-Order-Reduction Substructuring Method for Dynamic Condensation of Finite Element Models // AIAA JOURNAL. 2011. Vol. 49. No. 1. Pp. 87—96.

91. *Seshu P.* Substructuring and Component Mode Synthesis. Review // Shock and Vibration. 1997. Vol. 4. No. 3. Pp. 199—210.

92. Mnogourovnevye metody issledovaniya slozhnykh uprugikh sistem / A. S. Vol'mir, V. F. Mikhnev, V. N. Terskikh, A. B. Tikhomirov // Problemy ustoichivosti i predel'noi nesushchei sposobnosti konstruktsii: Mezhvuzovskii tematicheskii sb. tr. LISI. L. : LISI, 1983. S. 25—34.

93. *Vol'mir A. S., Terskikh V. N.* Issledovanie dinamiki konstruktsii iz kompozitnykh materialov na osnove metoda superelementov // Mekhanika kompozitnykh materialov. 1979. № 4. S. 652—655.

94. *Vol'mir A. S., Kuranov B. A., Turbaivskii A. T.* Statika i dinamika slozhnykh struktur: Prikladnye mnogourovnevye metody issledovanii. M. : Mashinostroenie, 1989. 248 s.

95. *Shmakov V. P.* Metod sinteza dinamicheskikh kharakteristik uprugikh modul'nykh konstruktsii // Vestnik MGTU. Ser. Mashinostroenie. 1991. № 1. S. 4—10.

96. *Likhoded A. I.* O skhodimosti metoda razlozheniya po sobstvennym formam kolebanii v zadachakh dinamicheskogo nagruzheniya // Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. 1986. № 1. S. 180—188.

97. *Ivanteev V. I., Chuban' V. D.* Raschet chastot i form svobodnykh kolebanii konstruktsii metodom mnogourovnevoi dinamicheskoi kondensatsii // Uchenye zapiski TsAGI. 1984. T. 15. № 4. S. 81—82.

98. *Dmitriev S. N.* O chastotnom kriterii v metode sinteza form kolebanii // Dinamika sistem i konstruktsii. Trudy MGTU im. N. E. Baumana. № 545. M. : MGTU, 1990. S. 51—69.

99. *Grigor'ev V. G.* Metodologiya issledovaniya dinamicheskikh svoistv slozhnykh uprugikh i gidrouprugikh sistem: dis… d-ra tekhn. nauk. M., 2000. 328 s.

100. *Belostotskii A. M., Dubinskii S. I., Potapenko A. L.* Metody dinamicheskogo sinteza podkonstruktsii v zadachakh modelirovaniya slozhnykh inzhenernykh sistem // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii. 2006. № 6. S. 45.

101. *Belostotskii A. M., Potapenko A. L.* Realizatsiya i verifikatsiya metodov submodelirovaniya i dinamicheskogo sinteza podkonstruktsii v universal'nykh i spetsializirovannykh programmnykh kompleksakh // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2011. Vol. 7. № 1. Pp. 76—84.

102. *Hurty W. C.* Dynamic analysis of structural systems using component modes // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. No. 4. Pp. 678—685.

103. *Craig R., Bampton M.* Coupling of Substructures for Dynamic Analysis // Am. Inst. Aero. Astro. J. 1968. Vol. 6. No. 7. Pp. 1313—1319.

104. *Craig R., Chang C.-J.* Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis // AIAA Journal. 1976. Vol. 14. No. 11. Pp. 1633—1635.

105. *Goldman R. L.* Vibration analysis by dynamic partitioning // AIAA Journal. 1969. Vol. 7. No. 6. Pp. 1152—1154.

106. *Hou S. N.* Review of modal synthesis techniques and a new approach // The Shock and Vibration Bulletin. 1969. No. 40. Pp. 25—39.

107. *Rubin S.* Improved component-mode representation for structural dynamic analysis // AIAA Journal. 1975. Vol. 13. No. 8. Pp. 995—1006.

108. *Irretier H.* A modal synthesis method with free interfaces and residual flexibility matrices for frame structures // Stavebnicky asopis. 1989. Vol. 37. No. 9. Pp. 601—610.

109. *MacNeal R. H.* A hybrid method of component mode synthesis // Computers and Structures. 1971. Vol. 1. No. 4. Pp. 581—601.

110. *Curnier A.* On three modal synthesis variants // Journal of Sound and Vibration. 1983. Vol. 90. No. 4. Pp. 527—540.

111. *Jezequel L., Seito H. D.* Component modal synthesis methods based on hybrid models. Part II. Numerical tests and experimental identification of hybrid models // Transactions ASME. Journal of Applied Mechanics. 1994. Vol. 61. No. 1. Pp. 109—116.

112. *Hale A. L., Meirovitch L.* A General Substructures Synthesis Method for Dynamic Simulation of Complex Structures // Journal of Sound and Vibration. 1980. Vol. 69. Pp. 309—326.

113. *Morosow G., Abbott P.* Mode selection // Synthesis of Vibrating Systems / Ed. Neubert V. H., Raney J. P. New York: ASME, 1971. Pp. 72—77.

114. *Hintz R. M.* Analytical methods in component modal synthesis // AIAA Journal. 1975. Vol. 13. No. 8. Pp. 1007—1016.

115. *Kuhar E. J., Stahle C. V.* Dynamic transformation method for modal synthesis // AIAA Journal. 1974. Vol. 12. No. 5. Pp. 672—678.

116. *Ookuma M., Nagamatsu A.* Vibration Analysis by Multiple Component Mode Synthesis Method // Bulletin of JSME. 1984. Vol. 27. Pp. 1288—1293.

117. *Ookuma M., Nagamatsu A.* Comparison of Component Mode Synthesis with MSC-NASTRAN // Bulletin of JSME. 1984. Vol. 27. Pp. 1294—1298.

118. *Bennighof J. K.* Adaptive multi-level substructuring method for acoustic radiation and scattering from complex structures // Computational methods for Fluid/Structure Interaction, A. J. Kalinowski, Ed. 1993. Vol. 178. AMSE, New York, pp. 25—38.

119. *Bennighof J. K., Lehoucq R. B.* An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics // SIAM Journal on Scientific Computing. 2004. Vol. 25. Pp. 2084—2106.

120. *Hetmaniuk U. L., Lehoucq R. B.* Multilevel methods for eigenspace computations in structural dynamics // Proc. 16th Int. Conf. Domain Decomposition Methods. New York. 2005.

121. An Implementation and evaluation of the AMLS Method for Sparse EigenValue Prob-lems / Gao W, Li X. S., Yang C., Bai Z. // ACM Transactions on Mathematical Software. 2007. Vol. 6. No. N. Pp. 1—27.

122. *Kim C. W.* Analysis of vibration levels of large structural system with recursive component mode synthesis method: theory and convergence // Proc. IMechE. Part C: J. Mechanical Engineering Science. 2006. Vol. 220. No. 9. Pp. 1339—1345.

123. *Kim C. W., Jung S. N., Choi J. H.* Automotive structure vibration with component mode synthesis on a multi-level // International Journal of Automotive Technology. 2008. Vol. 9. No. 1. Pp. 119—122.

124. *Bernshtein S. A.* Novyi metod vychisleniya kolebanii uprugikh system. M. : VIA RKKA. 1939.

125. *Bernshtein S. A.* Novyi metod vychisleniya chastot kolebanii uprugikh sistem i ego prilozhenie k zadacham ustoichivosti // Trudy VAMM Krasnoi Armii. Yubileinyi sbornik. M. 1940.

126. *Bernshtein S. A.* Osnovy dinamiki sooruzhenii. M. : Gosstroiizdat, 1941. 188 s.

127. *Smirnov A. F.* Staticheskaya i dinamicheskaya ustoichivost' sooruzhenii. M. : Transzheldorizdat, 1947.

128. *Smirnov A. F.* Ustoichivost' i kolebaniya sooruzhenii. M. : Transzheldorizdat, 1958.

129. *Lord Rayleigh*. Theory of Sound. London, 1894.

130. *Dzh. Strett* (*Lord Relei*). Teoriya zvuka. T. 1. GTII. 1940.

131. *Relei*. Teoriya zvuka. T. 1 i 2. Gostekhizdat, 1956.

132. *Segal' A. N.* Vysotnye zdaniya i sooruzheniya. Raschet na prochnost', zhestkost' i ustoichivost'. M. : Stroiizdat, 1949.

133. *Makushin V. M.* Effektivnoe primenenie energeticheskogo metoda issledovaniya ustoichivosti sterzhnei i plastin // Raschety na prochnost'. M. : Mashgizd, 1962. Vyp. 8. S. 225—252.

134. *Ignat'ev V. A., Shashkov S. M.* Dinamika sooruzhenii. Volgograd : Volgogradskii politekhn. in-t, Volgogizd, 1988. 83 s.

135. *Zemljanuchin S. J.* Vereinfachte Berechnung der Eigenschwingungsfrequenz Von Spindeln an Werkzingmashinen. "Undustrie-Anzligez". Essen, 82 Jahzgang. 1960. № 10.2.

136. *Zemlyanukhin S. Ya.* Uproshchennyi raschet sobstvennykh kolebanii shpindelei // Stanki i instrument. 1959. № 12.

137. *Zemlyanukhin S. Ya.* Izgibnye kolebaniya valov peremennogo secheniya: diss. kand. tekh. nauk. Saratov, 1962.

138. *Ignat'ev V. A., Ignat'eva O. M.* Ustoichivost' sooruzhenii (priblizhennye metody). Volgograd : Izd-vo Volgogradskogo politek. in-ta, 1986. 113 s.

139. *Grinenko N. I., Mokeev V. V.* O zadachakh issledovanii kolebanii konstruktsii metodom konechnykh elementov // Prikladnaya mekhanika. 1985. № 3. S. 25—30.

140. *Przhemnitskii E. S.* Matrichnyi metod issledovaniya konstruktsii na osnove analiza podstruktur // Raketnaya tekhnika i kosmonavtika. 1963. № 1.

141. Metod superelementov v raschetakh prochnosti sudovykh konstruktsii / V. A. Postnov, S. A. Dmitriev, B. K. Eltyshev, A. A. Rodionov. Sudostroenie, 1975.

142. Metod superelementov v raschetakh inzhenernykh sooruzhenii / V. A. Postnov, S. A. Dmitriev, B. K. Eltyshev, A. A. Rodionov. Sudostroenie, 1979.

143. *Postnov V. A., Moskalev A. N.* O primenenii metoda podstruktur dlya opredeleniya i razdeleniya kornei chastotnogo uravneniya konservativnykh sistem // Prikladnaya mekhanika. 1979. T. 15. № 3. S. 94—96.1

144. *Voronenok E. Ya., Sochinskii S. V.* Interpolyatsionnoe redutsirovanie matrits zhestkosti pri reshenii zadach stroitel'noi mekhaniki metodom superelementov // Prikladnaya mekhanika. 1981. T. 17. № 6. S. 114—118.

145. *Voronenok E. Ya., Palii O. M., Sochinskii S. V.* Redutsirovannye elementy v raschetakh prochnosti i vibratsii sudov // Sudostroenie. 1984. № 11. S. 9—13.

146. *Voronenok E. A., Palii O. M., Sochinskii S. V.* Metod redutsirovannykh elementov dlya rascheta konstruktsii. L. : Sudostroenie, 1990. 224 s.

147. *Rudykh O. L.* Sovershenstvovanie metoda redutsirovannykh elementov // Tez. regional'noi nauchno-tekhn. konf. po MNNTI «Dal'nyi Vostok Rossii». Khabarovsk: KhGTU, 1995. S. 196.

148. *Rudykh O. L.* Sovershenstvovanie metoda redutsirovannykh elementov na osnove sinteza s metodom superelementov // Izv. vuzov. Stroitel'stvo. 2006. № 7. S. 103—108.

149. *Rudykh O. L.* Metod chastotno-dinamicheskogo redutsirovaniya // Byulleten' nauchnykh soobshchenii №11 : sb. nauch. tr. Khabarovsk : DVGUPS, 2006. S. 4—8.

150. *Shmakov V. P.* Postroenie korrektiruyushchikh funktsii v metode Bubnova — Galerkina // Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. 1981. № 2. S. 80—92.

151. *Shmakov V. P.* Approksimatsiya garmonicheskogo otklika uprugoi konechno-mernoi sistemy v zavisimosti ot chastotnogo diapazona vneshnego vozdeistviya // Vestnik MGTU. Ser. Mashinostroenie. 1995. № 2. S. 96—110.

152. Dinamicheskoe nagruzhenie pilotiruemykh kosmicheskikh stantsii slozhnoi prostranstvennoi komponovki / A. V. Anisimov, V. V. Zabudkin, A. I. Likhoded, D. A. Ponomarev // Kosmonavtika i raketostroenie. 1998. Vyp. 13. S. 130—140.

153. Metodika rascheta dinamicheskikh nagruzok na slozhnye raketnye konstruktsii s vydeleniem kvazistaticheskikh sostavlyayushchikh / A. V. Anisimov, V. N. Vylomov, V. V. Zabudkin, A. I. Likhoded, D. A. Ponomarev // Kosmonavtika i raketostroenie. 1995. Vyp. 4. S. 95—107.

154. *Ignat'ev V. A.* Metody superdiskretezatsii v raschetakh slozhnykh sterzhnevykh sistem. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 1981. 108 s.

155. *Belostotskii A. M., Suturin I. M.* Superelementnoe modelirovanie staticheskogo i dinamicheskogo NDS mnogoetazhnykh panel'nykh zdanii // Sb. nauchn. trudov MGSU №5 «Voprosy prikladnoi matematiki i vychislitel'noi mekhaniki». M., 2002. S. 57—69.

156. *Belostotskii A. M., Vasil'ev S. L., Sidorov A. V.* Parallel'nye vychisleniya v reshenii bol'sherazmernykh zadach, osvoenie vozmozhnostei lidiruyushchikh programmnykh kompleksov i sobstvennye razrabotki // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010. Vol. 6. № 1—2. Pp. 65—66.

157. *Burman Z. I., Artyukhin G. A., Zarkhin B. Ya.* Programmnoe obespechenie matrichnykh algoritmov i metoda konechnykh elementov v inzhenernykh raschetakh. M. : Mashinostroenie, 1988. 256 s.

158. *Sapozhnikov A. I.* Metody superelementov v statike i dinamike panel'nykh zdanii. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1980. S. 33—37.

159. *Zubko A. M.* Ispol'zovanie sinteza form kolebanii v metode superelementov dlya resheniya zadach o kolebaniyakh konstruktsii. M. : MFTI. Dep. v VINITI №6358 – B86. 12 c.

160. *Demidov G. V,. Krivtsov Yu. V.* Raschet chastot i form svobodnykh kolebanii sterzhnevykh konstruktsii metodom superelementov // MKE v nekotorykh zadachakh chislennogo analiza. 1984. S. 31—35.

161. *Shakirzyanov R. A.* Superelementnyi metod sil v raschetakh na sobstvennye kolebaniya kombinirovannykh konstruktsii: dis… kand. tekh. nauk. Kazan', 1989. 155 s.

162. *Nemchinov Yu. I., Kozyr' A. A.* Ispol'zovanie kondensatsii dinamicheskikh peremennykh v metode prostranstvennykh konechnykh elementov // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii. 1985. № 1. S. 10—13.

163. *Matevosyan R. R.* Nekotorye prilozheniya kachestvennoi teorii kolebanii uprugikh sterzhnevykh sistem s beskonechno bol'shim chislom stepenei svobody // Issledovaniya po teorii sooruzhenii. M., 1962. Vyp. XI. S. 25—29.

164. *Klyuev Yu. I., Sokolov V. F.* Opredelenie sobstvennykh chastot i form kolebanii sostavnykh konstruktsii // Izv. vuzov. Ser. Mashinostroenie. 1973. S. 28—33.

165. *Mokeev V. V.* O zadache nakhozhdeniya sobstvennykh znachenii i vektorov bol'shikh matrichnykh sistem // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. T. 32. N. 10. 1992. S. 1652—1657.

166. *Mokeev V. V., Fot E. Ya.* Metod chastotnoi kondensatsii — effektivnyi podkhod v reshenii zadach dinamiki konstruktsii. Chelyabinskii gos. tekh. un-t, 1998.

167. *Guseev S. S., Kuranov B. A.* Osobennosti primeneniya metoda superelementov v zadachakh ustoichivosti i svobodnykh kolebanii // Tr. XIV Vsesoyuzn. konf. po teorii plastin i obolochek. Kutaisi 20—23 oktyabrya 1987. Tbilisi: Izd-vo Tbilisskogo un-ta, 1987. T. 1. S. 445—449.

168. *Ignat'ev V. A., Ignat'eva O. M.* Primenenie metoda chastotno-dinamicheskoi kondensatsii k resheniyu nepolnoi algebraicheskoi problemy sobstvennykh znachenii i sobstvennykh vektorov //

Konkretnye zadachi i ikh primenenie v stroitel'nom proizvodstve: Tez. dokl. Volgograd, 1987. S. 57—69.

169. *Ignat'ev V. A., Makarov A. V.* Novyi variant chastotno-dinamicheskoi kondensatsii s pokomponentnym sintezom sobstvennykh form // Chislennye metody resheniya zadach stroitel'noi mekhaniki, teorii uprugosti i plastichnosti. Tez. dokl. Volgograd, 1990. S. 53.

170. *Ignat'ev V. A., Makarov A. V.* Reshenie nepolnoi algebraicheskoi problemy po metodu posledovatel'noi chastotno-dinamicheskoi kondensatsii. Volgograd. 1991. Dep. v VINITI 18.02.91. № 803-B91. 25 c.

171. *Katerinin K. V.* Razvitie i primenenie metoda posledovatel'noi chastotno-dinamicheskoi kondensatsii k resheniyu zadach ustoichivosti slozhnykh sistem: dis… kand. tekhn. nauk. Volgograd, 2000. 108 s.

172. *Sukhin K. A.* Razvitie i primenenie energeticheskogo varianta metoda chastotno-dinamicheskoi kondensatsii dlya resheniya nepolnoi problemy sobstvennykh znachenii i sobstvennykh vektorov v dinamike sooruzhenii: dis… kand. tekhn. nauk. Volgograd, 2004. 134 s.

173. *Ignat'vev V. A., Makarov A. V.* Reshenie nepolnoi algebraicheskoi problemy sobstvennykh vektorov i sobstvennykh znachenii dlya zadach dinamiki i ustoichivosti metodom chastotno-dinamicheskoi kondensatsii // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii. 2005. № 1. C. 14—20.

174. *Ignat'ev V. A., Romashkin V. N.* Posledovatel'naya chastotno-dinamicheskaya kondensatsiya: Materialy nauchno-tekhnicheskoi Internet-konferentsii. VolgGASU, Mikhailovka, 2010. S. 62—85. URL: http://sfvolggasu.ru/images/foto/study/nauchnie_confirinsii/conf2010/conf2010.doc

175. *Ignat'ev V. A., Chanturidze A. U.* Metod chastotno-dinamicheskoi kondensatsii // Vestnik Volgogr. gos. arkhit.-stroit. un-ta. Ser.: Str-vo i arkhit. 2011. Vyp. 24(43). S. 46—53.

176. *Ignat'ev V. A*. Modifitsirovannyi metod posledovatel'noi chastotno-dinamicheskoi kondensatsii // Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo. 2011. № 2. S. 100—103.

177. *Romashkin V. N.* Superelementnaya formulirovka metoda chastotno-dinamicheskoi kondensatsii // Internet-Vestnik VolgGASU. 2013. № 1 (25). St. 8. URL: http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1%2825%29.pdf.

178. *Karpov D. V.* Razvitie metoda redutsirovannykh elementov dlya rascheta regulyarnykh sterzhnevykh sistem i analiza ploskikh temperaturnykh polei: dis... kand. tekhn. nauk. Vladivostok, 2002. 209 s.

179. *Ignat'ev V. A., Ignat'eva O. M.* Metod razrezhennykh setok i ego primenenie v raschete sterzhnevykh sistem s bol'shim chislom uzlov // Issledovaniya po stroitel'noi mekhanike, teoriya uprugosti i plastichnosti. Saratov, 1979. № 8. S. 55—79.

180. *Voss H., Yin J., Chen P.* Preconditioning Subspace Iteration for Large Eigenvalue Problems with Automated Multi-Level Sub-structuring // Proc. Conference on Applied Linear Algebra — in honor of Ivo Marek, Prague 2013. Pp. 1—20.

Поступила в редакцию
в марте 2015 г.

Ссылка для цитирования:

Игнатьев В. А., Ромашкин В. Н. Алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений высокого порядка в задачах динамики и устойчивости конструкций (обзор) // Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2015. Вып. 2(38). Ст. 7. Режим доступа: http://www.vestnik.vgasu.ru/

For citation:

Ignat'ev V. A., Romashkin V. N. [Algebraic problem of eigenvector and eigenvalues of high order in tasks of dynamics and stability of a construction]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2015, no. 2(38), paper 7. (In Russ.). Available at: http://www.vestnik.vgasu.ru/