

УДК 517.968.74

Н.Г. Бандурин, В.А. Игнатьев**МЕТОД И АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

На основе предложенной автором ранее процедуры интерполирования многочленами получены формулы интегрирования и дифференцирования. Формула интегрирования выражает значения функции и ее производных в точках разбиения отрезка через значения производной наивысшего порядка в этих точках и значения функции и производных низшего порядка в начальной точке. Формула дифференцирования выражает значения производных в точках разбиения отрезка через значения функции в этих точках и значения производных в начальной точке. С использованием формулы интегрирования описывается алгоритм и программа для численного решения систем корректных не жестких в общем случае существенно нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), содержащих интегралы с постоянными и/или переменными верхними пределами, подынтегральные выражения которых могут, в свою очередь, зависеть от «внутренних» интегралов, верхние пределы которых могут быть постоянными и/или переменными. Вопросы выбора начального приближения и сходимости итерационного процесса для общего случая не обсуждаются. Разработанная компьютерная программа для ПК работает в автоматическом режиме, т.е. для получения результатов расчета следует ввести в память компьютера только тексты уравнений и подынтегральных выражений в обычном виде, а также числовые параметры задачи. Приведены результаты решения трех тестовых примеров.

К л ю ч е в ы е с л о в а: начальная задача; интегро-дифференциальные уравнения; численные методы; нелинейные задачи.

Basing on the procedure of polynomial interpolation suggested by the author earlier integration and differentiation formulas were obtained. The integration formula expresses the values of function and its derivatives in the points of segment division through the values of highest-order derivative in these points and the values of function and low-order derivatives in the initial point. The differentiation formula expresses the values of derivatives in the points of segment division through the values of function in these points and the values of derivatives in the initial point. Applying the integration formula the authors describe an algorithm and a program for numerical solution of the systems of correct mild in general case essentially nonlinear ordinary integro-differential equations (IDE), containing integrals with constant and/or variable superior limits, the integrands of which in their turn may depend on the "internal" integrals with constant and/or variable superior limits. The issues of the initial estimate choice and iteration process convergence for general case are not discussed. The developed computer program for PC works in unattended mode, that is, to get the computation results one should enter only the texts of the equations and integrands in the regular form, as well as the problem's numerical parameters into the computer memory. The paper gives the results of the solution of three sample problems.

К е у w o r d s: initial problem; integro-differential equations; numerical methods, nonlinear problems.

Ставится задача найти на равномерной сетке $x_1 = a, x_2, \dots, x_N = b$ отрезка $[a, b]$ решение следующей системы $NY + NP$ интегро-дифференциальных уравнений

$$\mathbf{f}[x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \dots, \mathbf{R}(x), \mathbf{Q}(x), \mathbf{P}] = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{f}$ – вектор-столбец размером $NY + NP$;

$$(\mathbf{y}(x))^T = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_{NY}(x));$$

$$(\mathbf{R}(x))^T = (R_1(x), R_2(x), \dots, R_{NR}(x));$$

$$(\mathbf{Q}(x))^T = (Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_{NQ}(x));$$

$$R_i(x) = \int_a^b \varphi_i[x, u, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \dots, \mathbf{y}(u), \mathbf{y}'(u), \mathbf{r}(x, u), \mathbf{q}(x, u)] du;$$

$$Q_i(x) = \int_a^x \psi_i[x, u, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \dots, \mathbf{y}(u), \mathbf{y}'(u), \dots, \mathbf{r}(x, u), \mathbf{q}(x, u)] du;$$

$$(\mathbf{r}(x, u))^T = (r_1(x, u), r_2(x, u), \dots, r_{nr}(x, u));$$

$$(\mathbf{q}(x, u))^T = (q_1(x, u), q_2(x, u), \dots, q_{nq}(x, u));$$

$$r_i(x, u) = \int_a^b \mathcal{R}_i[x, u, v, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \dots, \mathbf{y}(u), \mathbf{y}'(u), \dots, \mathbf{y}(v), \mathbf{y}'(v), \dots] dv;$$

$$q_i(x, u) = \int_a^u \lambda_i[x, u, v, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \dots, \mathbf{y}(u), \mathbf{y}'(u), \dots, \mathbf{y}(v), \mathbf{y}'(v), \dots] dv;$$

$\mathbf{P}^T = (p_1, p_2, \dots, p_{NP})$ – вектор неизвестных числовых параметров,

где N – число точек разбиения отрезка интегрирования; NY – число неизвестных функций; NP – число неизвестных числовых параметров; NR , NQ – число интегралов с постоянными и переменными верхними пределами соответственно; nr , nq – то же для «внутренних» интегралов. Уравнения, определяющие краевые условия для системы (1), могут зависеть от значений неизвестных функций и их производных в любой точке отрезка интегрирования, содержать интегралы с постоянными верхними пределами, а также неизвестные числовые параметры. Для каждой неизвестной функции должно быть задано m краевых условий, где m – наивысший порядок производной этой функции.

Система (1.1) может содержать неизвестные функции без их производных.

Метод решения. Представляемый ниже численный метод произвольно высокого порядка для решения систем нелинейных интегродифференциальных уравнений основан на процедуре интерполирования, которая применяется не к самой функции, а к ее производной, что исключает при вычислении производных операцию дифференцирования интерполяционных функций и связанную с этой операцией погрешность. Полученные интерполяционные формулы содержат в явном виде значения производных на краях области интегрирования, что позволяет формализовать постановку начальных и краевых условий задачи.

Процедура интерполирования многочленами часто используется при разработке численных методов решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений и ИДУ [1–5]. Однако при известном подходе, когда эта процедура применяется непосредственно к искомой функции, а ее производные вычисляются в результате дифференцирования интерполяционного

многочлена, имеют место трудности при постановке краевых условий на границах области интегрирования, так как некоторые из узлов сетки могут не принадлежать этой области. Известные рекомендации [5] исключать из рассмотрения такие узлы с помощью алгебраических преобразований носят слишком общий характер, а при решении ИДУ высокого порядка трудно осуществимы. Кроме отмеченных трудностей при дифференцировании интерполяционных многочленов появляются дополнительные погрешности.

Особенность рассматриваемого ниже подхода заключается в том, что в качестве первого шага процедура интерполирования применяется к производной интерполируемой функции, затем производная для текущей точки выражается через значения производной в узлах сетки обычным способом [3, 4], а узловые значения функции, выражаемые через узловые значения производной, вычисляются в результате интегрирования полученного многочлена. В результате получается формула интегрирования. Обратные соотношения, выражающие производные через узловые значения функции (формула дифференцирования), получаются в результате только лишь алгебраических преобразований. Таким образом, предлагаемый подход позволяет вычислять производные без использования операции непосредственного дифференцирования интерполяционных многочленов и, следовательно, исключить связанные с этими операциями погрешности.

Для получения формулы интегрирования предположим, что на отрезке $[a, b]$ вещественной оси x задана сетка, в N узлах которой известны значения производной k -го порядка функции $y = f(x)$ определенной на $[a, b]$, и значения производных низших порядков в начальном узле $x = x_1$. Ставится задача вычисления в этих же узлах значений функции, ее производных низших порядков и интегралов, выраженных через узловые значения производной порядка k и производные низших порядков при $x = x_1$.

Интерполируя на отрезке $[x_1, x_n]$ ($n \leq N$) производную $y^{(k)}(x)$ многочленом степени $n - 1$, после соответствующих выкладок можно получить соотношение [6]

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Z_{ij}^{-1} y_j^{(k)} x^{i-1}. \quad (2)$$

Здесь определителем матрицы Z является определитель Вандермонда. При $N = n$ значения производной порядка $(k - 1)$ в узлах интерполяции получаются в результате последовательного интегрирования (2) в пределах отрезков $[x_1, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$y_i^{(k-1)} = y_1^{(k-1)} + s_{ij} y_j^{(k)}. \quad (3)$$

Здесь s – квадратная матрица интегрирования порядка n .

Если $N > n$, то, применяя последовательно формулу (3) на отрезках $[x_{j(n-1)+1}, x_{j(n-1)+n}]$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), можно получить компоненты вектора производной $\mathbf{Y}^{(k-1)}$ во всех узлах отрезка $[a, b]$

$$\mathbf{Y}^{(k-1)} = \mathbf{I}y_1^{(k-1)} + S\mathbf{Y}^{(k)}, \quad (4)$$

где $\mathbf{I}$ – единичный вектор, S – квадратная матрица интегрирования порядка N .

Выполнив интегрирование в соответствии с (4) P раз, получим формулы для вычисления производных в узлах интерполяции, выраженных через значения производных порядка k в этих же узлах, и производные низших порядков в начальном узле $x = x_1$

$$\mathbf{Y}^{(k-p)} = \sum_{m=0}^{p-1} S^m \mathbf{I}y_1^{(k-p+m)} + S^p \mathbf{Y}^{(k)} \quad \text{при } p \leq k. \quad (5)$$

Эта формула может быть использована для решения обыкновенных ИДУ, когда за неизвестные дискретной модели должны быть приняты значения производной наивысшего порядка в узлах интерполяции и значения производных низших порядков в узле $x = x_1$. При $a = 0, b = 6, n = 3, N = 7$ матрица S имеет вид

$$\begin{array}{cccccccc} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.4167 & 0.6667 & -0.0833 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.7500 & 0.6667 & -0.0833 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.6667 & 1.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.6667 & 1.3333 & 0.7500 & 0.6667 & -0.0833 & 0.0000 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.6667 & 1.3333 & 0.6667 & 1.3333 & 0.3333 & 0.0000 \end{array}$$

Если $p > k$, то компонентами вектора $\mathbf{Y}^{(k-p)}$ в (5) будут являться значения интегралов, а формула примет вид

$$\mathbf{Y}^{(k-p)} = \sum_{m=p-k}^{p-1} S^{p-k+m} \mathbf{I}y_1^{(m)} + S^p \mathbf{Y}^{(k)}. \quad (6)$$

В (6) учтено, что $y_1^{(k-p)} \equiv 0$ при $p > k$, поскольку в соответствии с принятыми обозначениями эти величины являются значениями интегралов в узле $x = x_1$.

Формулу дифференцирования можно получить, полагая $k = 1$ в равенстве (4) и решая его относительно вектора производных первого порядка $\mathbf{Y}'$. В результате можно записать

$$\mathbf{Y}' = (E - DS)\mathbf{I}y_1' + D\mathbf{Y}, \quad (7)$$

где E и D – единичная матрица и матрица дифференцирования порядка N .

Выполнив дифференцирование в соответствии с (7) P раз, получим формулу для вычисления производных P -го порядка в узлах интерполяции, выраженных через производные в начальной точке $x = x_1$ и значения функции в этих узлах

$$\mathbf{Y}^{(p)} = \sum_{m=0}^{p-1} D^m (E - DS) \mathbf{I}y_1^{(p-m)} + D^p \mathbf{Y}. \quad (8)$$

Формула (8) применима для решения как обыкновенных ИДУ, так и уравнений с частными производными.

Для любого целого $p \geq 0$ имеют место равенства:

$$\sum_{j=1}^N S_{ij}^p = (x_i - x_1)^p / p!, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^N D_{ij}^{p+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

которые выражают результаты интегрирования и дифференцирования функции $f(x) = 1$.

Очевидно, что предлагаемая интерполяционная процедура применима не только для функций, но и для их приращений. Использование формул (5) и (8) при численном решении краевых задач для систем интегродифференциальных уравнений дает возможность: 1) с высокой точностью аппроксимировать системы ИДУ, имеющие достаточно гладкие решения, их дискретными аналогами, так как формулы являются точными на отрезке $[a, b]$ для всех многочленов степени не выше n при любом $N \geq n$; 2) решать уравнения с заданными значениями функций и их производных не только на краях, но и внутри области интегрирования, поскольку при выводе формул (5) и (8) имеется возможность за начальную точку на отрезке $[a, b]$ принимать любой узел x_i ($i = 1, 2, \dots, N$); 3) при решении ИДУ высокого порядка исключить необходимость выполнения алгебраических преобразований на краях области, так как полученные формулы не зависят от номеров узлов, расположенных вне области интегрирования и содержат в явном виде необходимые для постановки граничных условий производные. Используя формулу Тейлора, можно получить оценку погрешности аппроксимации функции и ее производных $O(h^{n+1})$, где h – шаг сетки. Для вычисления смешан-

ных производных при решении M -мерных задач дифференцирование по формуле (8) выполняется последовательно по всем аргументам, а оценка погрешности (при постоянном N) будет $O(\sum_{i=1}^M h_i^{N+1})$.

Алгоритм численной реализации. Ниже приводится вывод формул итерационного процесса для вычисления узловых значений функции $y = f(x)$, являющейся решением одного нелинейного ИДУ m -го порядка на отрезке $[a, b]$, имеющего в своем составе интеграл $R(x)$ с постоянными пределами интегрирования $x_1 = a$ и $x_N = b$ и интеграл $Q(x)$ с переменным верхним пределом

$$f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x), R(x), Q(x)] = 0, \quad (11)$$

где $R(x) = \int_a^b \phi[x, u, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x), y(u), y'(u), \dots$

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \int_a^x \psi[x, u, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x), y(u), y'(u), \dots, \\
&\dots, y^{(m)}(u), r(x, u), q(x, u)] du, \\
r(x, u) &= \int_a^b \mathcal{G}[x, u, v, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x), y(u), y'(u), \dots, \\
&\dots, y^{(m)}(u), v, y(v), y'(v), \dots, y^{(m)}(v)] dv. \\
q(x, u) &= \int_a^u \lambda[x, u, v, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x), y(u), y'(u), \dots, \\
&\dots, y^{(m)}(u), v, y(v), y'(v), \dots, y^{(m)}(v)] dv.
\end{aligned}$$

Краевые условия могут быть записаны в виде уравнений, содержащих функцию, ее производные порядка ниже m , определенные в любом узле сетки и интегралы с постоянными верхними пределами. Если эти условия относятся только к крайним узлам, то их можно записать в виде

$$\begin{aligned}
B_i[a, b, y(a), y'(a), \dots, y^{(m-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(m-1)}(b), R(a, b)] &= 0, \\
i &= 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{12}$$

Последовательно подставляя в (11) $x_1 = a, x_2, \dots, x_N = b$ и учитывая (6), можно получить N уравнений относительно узловых значений функции Y и ее производных. Эти уравнения и краевые условия (12) можно записать в виде системы нелинейных уравнений относительно узловых значений функции и ее производных

$$F(y, y', \dots, y^{(m)}) = 0, \tag{13}$$

где $(y^{(s)})^T = (y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \dots, y_N^{(s)})$, $s = 0, 1, 2, \dots, m$.

В результате линеаризации (13) можно получить приближенное равенство

$$\Delta F \approx \sum_{s=0}^m G^s \Delta y^{(s)}, \tag{14}$$

где элементами матрицы G^s являются производные

$$\begin{aligned}
g_{ij}^s &= \frac{\partial F_i}{\partial y_j^{(s)}} + \frac{\partial F_i}{\partial R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j^{(s)}} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y_j^{(s)}} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial \lambda}{\partial y_j^{(s)}} \right) + \\
&+ \frac{\partial F_i}{\partial Q} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_j^{(s)}} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y_j^{(s)}} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial \lambda}{\partial y_j^{(s)}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{15}$$

В (14) производные низших порядков на основе (5) можно выразить через производные порядка m , что дает возможность получить формулу для вычисления приращения вектора основных неизвестных ΔY_{k+1} на k -й итерации

$$G_k \Delta Y_{k+1} + F_k = 0.$$

Здесь элементами вектора $\mathbf{Y}$ являются N узловых значений производной m -го порядка и производные низших порядков в начальном узле. Остальные операции итерационного процесса являются стандартными и здесь не приводятся. Алгоритм для решения системы уравнений (1) естественно обобщается. Заметим, что решение систем линейных ИДУ получается в результате выполнения одной итерации. Вычисление производных в (15) выполняется численно на основе простейшей формулы с малым шагом $H = 10^{-11}$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия $\|\mathbf{F}\|_2 < \varepsilon$, причем можно принимать $\varepsilon = H$. Программа для ПК работает в автоматическом режиме, т.е. для получения результата в табличной и/или в графической форме в память компьютера следует ввести абсолютный минимум информации: тексты уравнений и подынтегральных выражений в обычном виде и числовые параметры задачи. После ввода каждой строки исходных данных выполняется контроль корректности ее содержания и при обнаружении ошибки выдается соответствующее сообщение.

Проблема выбора начального приближения в итерационном процессе, а также проверка условий корректности по Адамару должна исследоваться для каждой конкретной задачи с учетом ее специфики и в общем виде для системы уравнений (1), по мнению автора, не может быть решена. В приведенных ниже тестовых примерах использовались различные начальные приближения, в результате чего выявлялись другие решения, удовлетворяющие заданным уравнениям и краевым условиям.

Результаты численного решения

Пример 1. Необходимо получить решение существенно нелинейного интегро-дифференциального уравнения 4-го порядка

$$y^{(IV)} + y'' - \int_0^x \int_0^\pi u y^{(IV)}(v) dv \cdot \int_0^u y''(v) dv du + \int_0^\pi \cos u \sin(y(u)) du - x^2 + 2(x \sin x + \cos x - 1) = 0.$$

Границы отрезка интегрирования: $x_1 = 0$, $x_N = \pi$.

Краевые условия:

$$y(\pi/2) - 1 = 0, \quad y(\pi) + \int_0^\pi [y(u) + y'''(u) \sin(y(u))] du - 2 = 0, \\ y'(0) - \cos(y''(0)) = 0, \\ y'(\pi) + (y'(\pi))^3 + 2 = 0.$$

Точное решение: $y(x) = \sin x$.

Начальное приближение: $y_0(x) = 0$.

В результате решения при различных числах N получены следующие значения максимального отклонения для функции Y приближенного решения от точного Δ :

$$\Delta_{N=11} = 3.6 \cdot 10^{-8}, \quad \Delta_{N=31} = 5 \cdot 10^{-9}, \quad \Delta_{N=51} = 1.8 \cdot 10^{-12}, \quad \Delta_{N=101} = 2 \cdot 10^{-13}.$$

Эта же результаты получены также при следующих выражениях для функции $y_0(x)$: 10, x , $\cos x$, $\cos x - x$, $\cos x - x \exp(-x)$, $\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$. При других начальных приближениях выявлено еще два решения

П р и м е р 2. Существенно нелинейное интегро-дифференциальное уравнение 8-го порядка

$$y^{(VIII)}(1 + y^{(VIII)}) + \cos(y^{(V)}) - \int_0^x \int_0^u y'''(v) dv \cdot \int_0^u y^{(VIII)}(v) \cos(y'(v)) dv du + \\ + \int_0^\pi y(u) du \cdot \int_0^x \int_0^u y'''(u) y'(v) dv du - \sin 1(1 - \cos x) - \sin x - \cos 1 = 0.$$

Границы отрезка интегрирования: $x_1 = 0$, $x_N = \pi$.

Краевые условия:

$$y(\pi/2) - 1 = 0, \quad y(\pi) + \int_0^\pi y'(u) y^{(IV)}(u) du = 0, \\ y'(0) - 1 = 0, \quad y'(\pi) + 1 = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y''(\pi) = 0, \\ y'''(0) + \int_0^\pi \int_0^u y'''(u) y'(v) dv du = 0, \quad y'''(\pi) - 1 = 0.$$

Здесь первое условие задано в средней точке отрезка интегрирования.

Точное решение: $y(x) = \sin x$.

Начальное приближение: $y_0(x) = 0$.

Отклонения для функции y приближенного решения от точного:

$$\Delta_{N=11} = 6 \cdot 10^{-8}, \quad \Delta_{N=31} = 3 \cdot 10^{-12}, \quad \Delta_{N=51} = 4 \cdot 10^{-14}, \quad \Delta_{N=101} = 3 \cdot 10^{-14}.$$

Эти же результаты получены также при следующих выражениях для функции $y_0(x)$: 10000, -10000 , $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $x^2 \exp(-x)$, $\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$. При других начальных приближениях выявлено еще два решения.

П р и м е р 3. Решить систему уравнений относительно узловых значений функций y_1 и y_2 , а также числовых параметров p_1 и p_2 :

$$y_1'' + \int_1^x [u - \int_1^u x y_1'(v) / y_2(v) dv + p_1 - 2] du + \int_1^3 y_1''(u) y_2(u) du + \\ + \int_1^3 [x + u \int_1^u y_1(v) / y_2(v) dv] du + p_1 x + 2x^3 - 16.5x^2 - 2x - 1463.5 = 0, \\ y_2 + \int_1^x \int_1^u y_1(v) / y_2(v) dv du - 1 / p_2 - 7 / 6x^3 + 0.5x = 0, \\ p_1 + p_1^3 + \int_1^3 y_1''(u) y_2(u) du - 1466 = 0, \\ p_2 + \int_1^3 \exp(0.25 y_1'(u) / y_2(u)) du - 2e - 3 = 0.$$

Границы отрезка интегрирования: $x_1 = 1$, $x_N = 3$.

Краевые условия:

$$y_1(1) + \int_1^3 0.25y_1'(u) / y_2(u) du - 2e - 1 = 0,$$

$$y_1(3) - p_1 + p_2 - 82 = 0.$$

Точное решение: $y_1(x) = x^4$, $y_2(x) = x^3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$.

Начальное приближение: $y_{10}(x) = 2$, $y_{20}(x) = 2$, $p_{10} = 1$, $p_{20} = 2$.

Отклонения для функций y_1 и y_2 приближенного решения от точного:

$$\Delta_{1,N=7} = 3 \cdot 10^{-13}, \Delta_{1,N=11} = 7 \cdot 10^{-13}, \Delta_{1,N=15} = 3 \cdot 10^{-12},$$

$$\Delta_{1,N=51} = 2 \cdot 10^{-12},$$

$$\Delta_{2,N=7} = 2 \cdot 10^{-13}, \Delta_{2,N=11} = 3 \cdot 10^{-13}, \Delta_{2,N=15} = 2 \cdot 10^{-12}, \Delta_{2,N=51} = 10^{-12}.$$

Для сетки $N = 51$ получены следующие приближенные значения параметров: $p_1 = 2.00000000000001$, $p_2 = 3.00000000000002$. Эти же результаты получены также при следующих выражениях для функций $y_{10}(x)$ и $y_{20}(x)$: $100, 10; \exp x + \sinh x, \exp x; \exp(\sin x), \exp x - \cosh x + 1$.

При других начальных приближениях выявлено еще два решения.

Так как точное решение этой системы уравнений выражается через степенные функции, то отклонение полученных результатов от точных значений обусловлено только погрешностью арифметических вычислений, поэтому при увеличении N отклонение незначительно возрастает.

Число выполненных итераций для этих трех задач практически не зависит от N и равно 11, 8 и 37 соответственно. Сравнительно большое число выполненных итераций для третьей задачи обусловлено необходимостью вычислять кроме узловых значений функций также числовые значения параметров p_1 и p_2 , что снижает скорость сходимости.

Выводы. Формулы интегрирования, выражающие значения функции в узловых точках сетки через производные в этих точках, и формулы дифференцирования, выражающие значения производных через значения функции в точках, получены на основе новой процедуры интерполирования полиномами, когда первоначальная интерполяция выполняется между узловыми значениями не самой функции, а ее производной. В результате имеют место три положительных эффекта: во-первых, отпадает необходимость дифференцирования интерполирующих полиномов, что связано с появлением дополнительной погрешности; во-вторых, нелинейные уравнения, получающиеся в результате дискретизации ИДУ, зависят только от значений функций и их производных в точках внутри отрезка интегрирования; в-третьих, появляется возможность формализовать постановку начальных и краевых условий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1979.

2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. : Мир, 1990.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Ч. 2. М. : Физматгиз, 1962.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. : Наука, 1973.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Мир, 1968.
6. Бандурин Н.Г. Новый численный метод порядка n для решения интегро-дифференциальных уравнений общего вида // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, № 2. С. 3—10.
7. Бандурин Н.Г., Игнатъев В.А. Комплекс программ для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), содержащих производные и интегралы дробного порядка // Материалы IX Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (23—27 октября 2006 г.). Т. 2. Ч. 1. М. : Изд-во МГУ, 2006.
8. Бандурин Н.Г., Игнатъев В.А. Пакет программ для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (одно-, двух- и трехмерные начально-краевые задачи) // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 2. С. 105—111.

© Бандурин Н.Г., Игнатъев В.А., 2008

Поступила в редакцию
в ноябре 2008 г.