

УДК 004.42:624.04

**К. В. Катеринин****ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТНО-ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ**

Рассмотрены особенности использования модифицированного варианта метода последовательной частотно-динамической конденсации при решении задач общей устойчивости различных конструкций, представляемых дискретной расчетной схемой в форме метода конечных элементов с большим числом степеней свободы.

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** неполная проблема собственных значений и собственных векторов, редуцирование.

The author considers the features of using the modified version of the method of consequential frequency-dynamic condensation when solving problems of overall stability of different constructions submitted by discrete calculation scheme in the form of the finite element method with a large number of degrees of freedom.

**К e y w o r d s:** incomplete problem of eigenvalues and eigenvectors, reduction.

Исследование устойчивости сооружений и конструкций на основе дискретных расчетных моделей сводится в общем случае к решению алгебраической проблемы собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ) для матричного уравнения устойчивости вида

$$[K - PY]\{Z\} = 0, \quad (1)$$

где  $K$  и  $Y$  — соответственно матрицы жесткости и потенциала нагрузки системы,  $\{Z\}$  — вектор узловых перемещений,  $P$  — искомый критический параметр, пропорционально которому изменяется вся внешняя нагрузка.

Так как практический интерес для инженера представляют лишь несколько младших значений критического параметра  $P$  и соответствующие им формы потери устойчивости, то можно говорить о сведении задач устойчивости к решению неполной алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов.

При рассмотрении сложных систем требуемое для их детального представления число степеней свободы может составить число порядка  $10^5$  и выше, что приводит к необходимости решения проблемы СЗ и СВ такого же порядка. В этом случае на первый план выходят ограничения, связанные с большим объемом вычислений, обуславливающие принципиальную возможность решения такой задачи. Для разрешения этой проблемы можно использовать понижение размерности расчетной модели путем исключения части степеней свободы по тому или иному специальному алгоритму (такие алгоритмы называют редуцированными). Они основаны на разделении всех степеней свободы системы на основные (обозначим их индексом  $r$ , их количество —  $n$ ) и второстепенные (обозначим  $s$ ), после чего уравнение (1) принимает блочный вид:

$$\left( \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rs} \\ K_{sr} & K_{ss} \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} Y_{rr} & Y_{rs} \\ Y_{sr} & Y_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} Z_r \\ Z_s \end{Bmatrix} = 0. \quad (2)$$

Далее второстепенные степени свободы исключаются по соответствующему редуциционному алгоритму, а оставляемые основные элементы расчетных матриц изменяются на величины конденсационных добавок, несущих в себе информацию об исключаемых из уравнения неизвестных. Это обеспечивает изменение свойств редуцированной системы в сторону соответствия исходной системе, и уравнение для конденсированной к основным степеням свободы системы принимает вид

$$[\tilde{K} - \tilde{P}\tilde{Y}]\{\tilde{Z}\} = 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{K}$  и  $\tilde{Y}$  — редуцированные матрицы жесткости и потенциала нагрузки порядка  $n$ ,  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Z}$  — собственное значение и собственный вектор редуцированного уравнения устойчивости, соответствующие искомой младшей части спектра критических нагрузок системы.

На сегодняшний день известен ряд редуциционных методов и их модификаций. Исторически первым и простейшим из них является метод статической конденсации, предложенный Р. Дж. Гайаном применительно к решению задач о свободных колебаниях конструкций [1]. Алгоритм метода основан на допущении о равенстве нулю сил инерции по направлению второстепенных степеней свободы, что придает данному методу максимальную простоту, но вместе с тем приводит к достаточно грубому моделированию исходной конструкции редуцированной, что не всегда обеспечивает стабильность получаемых результатов.

Различные варианты метода последовательной частотно-динамической конденсации [2—6] благодаря учету динамических свойств исключаемых координат обеспечивают улучшенную точность получаемых результатов, а используемый в них блочный подход способствует существенному снижению вычислительной емкости алгоритма.

Рассмотрим использование модифицированного варианта метода последовательной частотно-динамической конденсации [3] при решении задач общей устойчивости различных конструкций, представляемых дискретной расчетной схемой в форме метода конечных элементов с большим числом степеней свободы.

На первом этапе выполним статическую конденсацию уравнения (2) к основным степеням свободы. Согласно принятому допущению о том, что внешняя нагрузка имеет нулевой потенциал по направлению второстепенных степеней свободы, относящиеся к ним блоки матрицы  $Y$  принимаем тождественно равными нулю. В этом случае из второго уравнения системы получаем предельно простую зависимость второстепенных координат от основных:

$$Z_s = -K_{ss}^{-1}K_{sr}Z_r. \quad (4)$$

Полный вектор перемещений представим в виде

$$Z = \begin{Bmatrix} Z_r \\ Z_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r \\ -K_{ss}^{-1}K_{sr} \end{bmatrix} Z_r = B_{st} Z_r, \quad (5)$$

где  $E_r$  — единичная матрица порядка  $r$ ,  $B_{st}$  — матрица статического преобразования координат.

Приравнивая выражения для потенциальной энергии деформации и потенциала внешней нагрузки исходной и редуцированной систем, получаем:

$$U = \frac{1}{2} Z^T K Z = \frac{1}{2} Z_r^T K^* Z_r,$$

$$W = \frac{1}{2} Z^T Y Z = \frac{1}{2} Z_r^T Y^* Z_r,$$

где  $U$  — потенциальная энергия деформации, равная работе внутренних сил, взятой с обратным знаком;  $W$  — потенциал нагрузки, равный работе внешних сил;  $K^*$  и  $Y^*$  — статически конденсированные матрицы жесткости и потенциала внешней нагрузки соответственно. Из этих равенств получаем выражения для статически конденсированных матриц жесткости и потенциала внешней нагрузки:

$$K^* = B_{st}^T K B_{st} = K_{rr} - K_{rs} K_{ss}^{-1} K_{sr}, \quad (6)$$

$$Y^* = B_{st}^T Y B_{st} = Y_{rr} - K_{rs} K_{ss}^{-1} Y_{sr} - Y_{rs} K_{ss}^{-1} K_{sr} + K_{rs} K_{ss}^{-1} Y_{ss} K_{ss}^{-1} K_{sr}.$$

Для сокращения объема вычислений последнее равенство можно использовать в сокращенной форме, приняв допущение о нулевом потенциале внешней нагрузки по направлению второстепенных степеней свободы, и тогда второе и четвертое слагаемые обнуляются. Однако практика расчетов показывает, что такое упрощение может вызывать нестабильность расчетного алгоритма, особенно при малом числе основных степеней свободы, и поэтому его можно рекомендовать как основу алгоритма для серийных оценочных расчетов со сравнением получаемых результатов для использования на компьютерах малой мощности.

Наибольшие затруднения с точки зрения вычислительной емкости в выражениях (6) вызывает обращение матрицы  $K_{ss}$  высокого порядка. Для оптимизации этой процедуры можно использовать суперэлементный подход, заключающийся в разбиении всей конструкции на  $m$  частей, каждая из которых должна быть геометрически отделена от соседних отдельно рассматриваемыми узлами, называемыми граничными. Совокупность основных и граничных степеней свободы обозначим индексом  $a$ , и будем конденсировать второстепенные координаты вначале к ним. В этом случае второстепенные блоки в матрицах жесткости и потенциала нагрузки приобретут блочно-диагональную структуру:

$$K = \begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{as}^{(1)}] & [K_{as}^{(2)}] & \dots & [K_{as}^{(m)}] \\ [K_{sa}^{(1)}] & [K_{ss}^{(1)}] & & & \\ [K_{sa}^{(2)}] & & [K_{ss}^{(2)}] & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ [K_{sa}^{(m)}] & & & & [K_{ss}^{(m)}] \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} [Y_{aa}] & [Y_{as}^{(1)}] & [Y_{as}^{(2)}] & \dots & [Y_{as}^{(m)}] \\ [Y_{sa}^{(1)}] & [Y_{ss}^{(1)}] & & & \\ [Y_{sa}^{(2)}] & & [Y_{ss}^{(2)}] & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ [Y_{sa}^{(m)}] & & & & [Y_{ss}^{(m)}] \end{bmatrix}.$$

Обращение блочно-диагональной матрицы можно выполнить путем последовательного обращения ее диагональных блоков:

$$\begin{aligned} [K_{ss}]^{-1} &= \begin{bmatrix} [K_{ss}^{(1)}] & & & & \\ & [K_{ss}^{(2)}] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [K_{ss}^{(m)}] & \\ & & & & [K_{ss}^{(m)}] \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [K_{ss}^{(1)}]^{-1} & & & & \\ & [K_{ss}^{(2)}]^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [K_{ss}^{(m)}]^{-1} & \\ & & & & [K_{ss}^{(m)}]^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Эта процедура уже не вызывает затруднений вследствие значительно меньшего порядка каждого из подблоков  $K_{ss}^{(i)}$ .

Вследствие такой структуры матрицы жесткости матрица-преобразователь  $B_{st}$  также будет иметь блочную структуру. Если в этом случае поблочно распisać выражения (6), то легко заметить, что такой же результат можно получить, выполнив последовательно аналогичные преобразования над отдельными блоками. Матрица-преобразователь для статической конденсации  $i$ -го блока второстепенных неизвестных в этом случае будет иметь вид:

$$B_{st}^{(i)} = \begin{bmatrix} E_a \\ -[K_{ss}^{(i)}]^{-1}[K_{sa}^{(i)}] \end{bmatrix}, \quad (7)$$

и выражения для конденсированных матриц жесткости и потенциала с учетом конденсации только  $i$ -го блока второстепенных степеней свободы:

$$\begin{aligned} K_{st}^{(i)} &= [B_{st}^{(i)}]^T \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{as}^{(i)} \\ K_{sa}^{(i)} & K_{ss}^{(i)} \end{bmatrix} [B_{st}^{(i)}] = [K_{aa}] - [K_{as}^{(i)}][K_{ss}^{(i)}]^{-1}[K_{sa}^{(i)}], \\ Y_{st}^{(i)} &= [B_{st}^{(i)}]^T \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{as}^{(i)} \\ Y_{sa}^{(i)} & Y_{ss}^{(i)} \end{bmatrix} [B_{st}^{(i)}] = [Y_{aa}] - [K_{as}^{(i)}][K_{ss}^{(i)}]^{-1}[Y_{sa}^{(i)}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Выполнив последовательно конденсацию всех  $m$  блоков второстепенных степеней свободы и просуммировав результаты, получаем окончательные статически конденсированные матрицы:

$$K_{st} = \sum_{i=1}^m K_{st}^{(i)} - (m-1)K_{aa}, \quad (9)$$

$$Y_{st} = \sum_{i=1}^m Y_{st}^{(i)} - (m-1)Y_{aa}.$$

Данный алгоритм можно еще упростить, отметив тот факт, что в процессе преобразований (8) основные блоки  $aa$  у обеих матриц не меняются, а лишь являются слагаемыми в выражениях результатов. Это дает нам возможность использовать эти блоки для поэтапного накопления результатов конденсации. Для этого в выражении (8) будем на каждом последующем, начиная со второго,  $i$ -м этапе конденсации подставлять вместо  $K_{aa}$  и  $Y_{aa}$  результаты предыдущего,  $(i-1)$ -го этапа конденсации —  $K_{st}^{(i)}$  и  $Y_{st}^{(i)}$  соответственно. При таком подходе отпадает необходимость использования выражений (9), так как после выполнения последнего этапа конденсации мы сразу получаем окончательный результат.

Далее аналогичным образом конденсируем граничные степени свободы к основным (в зависимости от числа первых проводим конденсацию в один этап или используем аналогичный блочный алгоритм), и получаем окончательно статически конденсированные матрицы  $K^*$  и  $Y^*$ .

Следует отметить, что при очень большом числе степеней свободы расчетной модели возможна организация многоуровневого алгоритма последовательной конденсации, когда каждая подструктура аналогично разделяется на ряд подструктур следующего уровня и т. д. Также весьма перспективным с позиций сокращения вычислительной емкости представляется использование сплайн-интерполяции поля перемещений между основными степенями свободы, алгоритм которой рассмотрен в [7].

В заключение первого этапа, решая с помощью любого из стандартных алгоритмов уравнение

$$[K^* - P^*Y^*]\{Z^*\} = 0, \quad (10)$$

получим  $n$  младших СЗ и СВ, используемых в качестве первого приближения к искомому значениям критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости.

На втором этапе разделим второстепенные степени свободы на  $t$  блоков и сформируем  $t$  парциальных (частичных) систем, каждая из которых состоит из всех основных и одного из блоков второстепенных степеней свободы. Характеризующие эти системы парциальные матрицы жесткости и потенциала нагрузки получим путем статической конденсации соответствующих исходных матриц ко входящим в данную парциальную систему степеням свободы и обозначим их для  $i$ -й парциальной системы соответственно  $K^{*(i)}$  и  $Y^{*(i)}$ . Решим полную проблему собственных значений для каждой из парциальных систем:

$$\left[ K^{*(i)} - P^{*(i)} Y^{*(i)} \right] \{ Z^{*(i)} \} = 0. \quad (11)$$

Составим диагональную матрицу  $\Lambda^{(i)}$  из  $n$  младших собственных значений  $P^{*(i)}$ , полученных из решения (11). Из соответствующих им и расположенных в том же порядке  $n$  собственных векторов из  $Z^{*(i)}$  составим матрицу  $V^{(i)}$ , причем оставим лишь компоненты, относящиеся к главным координатам. Благодаря увеличенному числу степеней свободы каждой из парциальных систем по сравнению с полученной на первом этапе статически конденсированной системой (10), можно рассчитывать для каждой из них на лучшее приближение к точному решению. Поэтому считая, что по сравнению с  $P^*$  и  $Z^*$  собственные пары в  $\Lambda^{(i)}$  и  $V^{(i)}$  более точны, запишем с их использованием (10) в виде

$$K^{*(i)} V^{(i)} = Y^{*(i)} V^{(i)} \Lambda^{(i)}, \quad (12)$$

где  $K^{*(i)}$  и  $Y^{*(i)}$  — исправленные матрицы жесткости и потенциала нагрузки полностью редуцированного уравнения порядка  $n$  на основании равенства его собственных пар уточненным значениям из  $\Lambda^{(i)}$  и  $V^{(i)}$ .

Поскольку имея одно уравнение, мы можем однозначно выразить лишь одну из исправляемых матриц, то решим (12) относительно  $Y^{*(i)}$ , оставив матрицу жесткости в исходном виде  $K^*$ :

$$Y^{*(i)} = K^* V^{(i)} \left( \Lambda^{(i)} \right)^{-1} \left( V^{(i)} \right)^{-1}. \quad (13)$$

Вариант с корректировкой матрицы потенциала представляется более правильным с энергетических позиций, так как при этом варианте мы влияем лишь на вычисляемое значение суммарной работы внешних сил, тогда как общая схема деформирования сооружения и накапливаемая при этом потенциальная энергия деформации не меняются. Если же изменять матрицу жесткости, то это приведет к изменению характера работы конструкции и отклонению напряженно-деформированного состояния расчетной модели от действительного. Последнее может вызвать как необходимое изменение потенциальной энергии деформации, так и неконтролируемое — величины потенциала нагрузки, вследствие чего возможен рост погрешности получаемых результатов. Выполненные тестовые расчеты подтверждают справедливость данных соображений, поэтому будем вносить корректировку в матрицу потенциала внешней нагрузки.

Матрица конденсационных добавок от учета блока второстепенных неизвестных  $i$ -й парциальной системы к матрице потенциала главных степеней свободы:

$$\Delta Y^{(i)} = Y^{*(i)} - Y^*. \quad (14)$$

Найдем аналогичным образом матрицы конденсационных добавок для всех  $t$  парциальных систем, и, суммируя их, находим окончательную конденсированную матрицу потенциала внешней нагрузки:

$$\tilde{Y} = Y^* + \sum \Delta Y^{(i)}. \quad (15)$$

Решая конденсированное уравнение устойчивости

$$[K^* - \tilde{P}\tilde{Y}]\{\tilde{Z}\} = 0, \quad (16)$$

получаем редуцированный спектр из  $n$  младших критических сил и соответствующие им формы потери устойчивости, выраженные через главные координаты.

При необходимости получения полных форм потери устойчивости, включая относящиеся ко второстепенным неизвестным компоненты, можно воспользоваться зависимостью (5) для случая конденсации в один этап или (7) — для случая блочной конденсации. В последнем случае следует расположить найденные для всех второстепенных блоков компоненты перемещений в соответствии с их номерами в расчетной схеме. Для этого удобно использовать матричное умножение с составленной для каждой парциальной системы матрицей перенумерации.

Для иллюстрации результата применения рассмотренного алгоритма выполним расчет на устойчивость центрально-сжатого стержня постоянного поперечного сечения, жестко защемленного с обоих концов и нагруженного постоянной продольной силой. Дискретная расчетная схема сформирована по МКЭ разбиением на 201 стержневой элемент равной длины и содержит 400 степеней свободы. При такой мелкой конечно-элементной сетке для этой задачи расхождение между точным аналитическим решением и найденными по МКЭ значениями первых четырех критических сил не превышает 0,0001 %. Матрицы метода конечных элементов для стержневого КЭ приведены, например, в [8].

Рассмотрим результаты применения рассматриваемых алгоритмов редуцирования при разном числе удерживаемых основных координат (от 5 до 25 % от общего количества). Узлы, степени свободы которых принимаются за основные, назначим с равным шагом по длине стержня, благодаря чему мы можем абстрагироваться от вопроса о местах их размещения. Общей рекомендацией к правильному выбору основных координат является возможность наиболее полного представления только с их помощью (не используя второстепенные) младших форм потери устойчивости конструкции, что подробно описано в [2—6].

Найденные для стержня значения первых четырех критических значений параметра внешней нагрузки при назначении различного числа основных степеней свободы представлены в табл. 1—5 в безразмерном виде, соответствующем стержню единичной длины и жесткости. Также приведенные в табл. 2—5 значения полученных погрешностей рассматриваемых алгоритмов с целью облегчения их восприятия и анализа представлены в графической форме на рис. 1—4. По горизонтальной оси показан процент от общего количества оставляемых в расчете основных координат, а по вертикальной — относительная погрешность (в процентах, без учета знака) определения соответствующей критической силы относительно решения по МКЭ, принимаемого за точное. Данные табл. 1 из графического представления исключим, так как при таком малом числе оставляемых в расчете координат результат, естественно, выбивается из общей картины повышенными погрешностями, но он представляет несомненный интерес с точки зрения анализа устойчивости работы алгоритмов в экстремальных режимах.

Таблица 1

*Конденсация к 20 степеням свободы (5 % от общего количества)*

| Критическая сила № | МКЭ      | Статическая конденсация | Погрешность, % | Базовая ЧДК | Погрешность, % | Модифицированная ЧДК | Погрешность, % |
|--------------------|----------|-------------------------|----------------|-------------|----------------|----------------------|----------------|
| 1                  | 9,8696   | 9,8892                  | 0,1986         | 9,8527      | 0,1712         | 9,8530               | 0,1682         |
| 2                  | 39,4785  | 40,9746                 | 3,7897         | 37,8820     | 4,0440         | 38,4691              | 2,5568         |
| 3                  | 88,8269  | 122,8608                | 38,3149        | 72,7447     | 18,1051        | 80,2306              | 9,6776         |
| 4                  | 157,9160 | 296,5254                | 87,7741        | 107,0360    | 32,2197        | 171,5570             | 8,6381         |

Таблица 2

*Конденсация к 40 степеням свободы (10 % от общего количества)*

| Критическая сила № | МКЭ     | Статическая конденсация | Погрешность, % | Базовая ЧДК | Погрешность, % | Модифицированная ЧДК | Погрешность, % |
|--------------------|---------|-------------------------|----------------|-------------|----------------|----------------------|----------------|
| 1                  | 9,8696  | 9,8718                  | 0,0223         | 9,8680      | 0,0162         | 9,8680               | 0,0162         |
| 2                  | 39,4785 | 39,6317                 | 0,3881         | 39,3975     | 0,2052         | 39,4052              | 0,1857         |
| 3                  | 88,8269 | 90,6546                 | 2,0576         | 88,2640     | 0,6337         | 88,2887              | 0,6059         |
| 4                  | 157,916 | 167,6608                | 6,1709         | 156,1500    | 1,1183         | 156,9115             | 0,6361         |

Таблица 3

*Конденсация к 60 степеням свободы (15 % от общего количества)*

| Критическая сила № | МКЭ     | Статическая конденсация | Погрешность, % | Базовая ЧДК | Погрешность, % | Модифицированная ЧДК | Погрешность, % |
|--------------------|---------|-------------------------|----------------|-------------|----------------|----------------------|----------------|
| 1                  | 9,8696  | 9,8702                  | 0,0061         | 9,8694      | 0,0020         | 9,8694               | 0,0020         |
| 2                  | 39,4785 | 39,5155                 | 0,0937         | 39,4642     | 0,0362         | 39,4661              | 0,0314         |
| 3                  | 88,8269 | 89,2604                 | 0,4880         | 88,6653     | 0,1819         | 88,6368              | 0,2140         |
| 4                  | 157,916 | 160,3772                | 1,5586         | 157,5848    | 0,2097         | 157,8280             | 0,0557         |

Таблица 4

*Конденсация к 80 степеням свободы (20 % от общего количества)*

| Критическая сила № | МКЭ     | Статическая конденсация | Погрешность, % | Базовая ЧДК | Погрешность, % | Модифицированная ЧДК | Погрешность, % |
|--------------------|---------|-------------------------|----------------|-------------|----------------|----------------------|----------------|
| 1                  | 9,8696  | 9,8698                  | 0,0020         | 9,8695      | 0,0010         | 9,8695               | 0,0010         |
| 2                  | 39,4785 | 39,4916                 | 0,0332         | 39,4740     | 0,0114         | 39,4744              | 0,0104         |
| 3                  | 88,8269 | 88,9790                 | 0,1712         | 88,8017     | 0,0284         | 88,7920              | 0,0393         |
| 4                  | 157,916 | 158,7778                | 0,5457         | 157,8496    | 0,0420         | 157,8932             | 0,0144         |

Таблица 5

*Конденсация к 100 степеням свободы (25 % от общего количества)*

| Критическая сила № | МКЭ     | Статическая конденсация | Погрешность, % | Базовая ЧДК | Погрешность, % | Модифицированная ЧДК | Погрешность, % |
|--------------------|---------|-------------------------|----------------|-------------|----------------|----------------------|----------------|
| 1                  | 9,8696  | 9,8697                  | 0,0010         | 9,8696      | 0,0000         | 9,8696               | 0,0000         |
| 2                  | 39,4785 | 39,4843                 | 0,0147         | 39,4772     | 0,0033         | 39,4774              | 0,0028         |
| 3                  | 88,8269 | 88,8936                 | 0,0751         | 88,8152     | 0,0132         | 88,8099              | 0,0191         |
| 4                  | 157,916 | 158,2925                | 0,2384         | 157,8923    | 0,0150         | 157,9130             | 0,0019         |



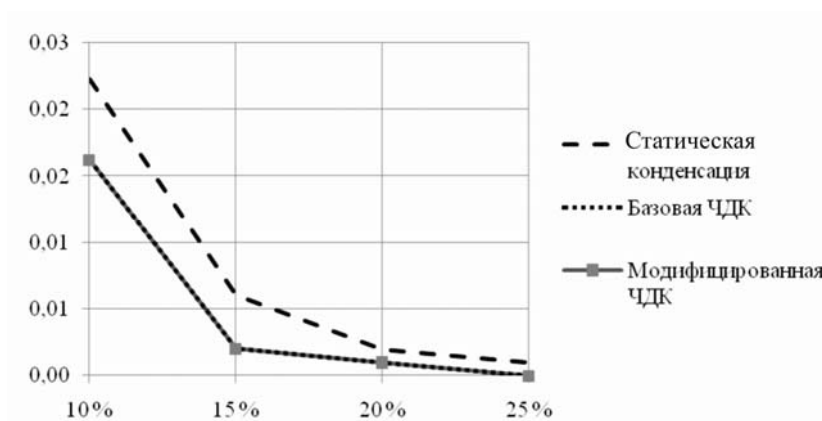


Рис. 1. Зависимость погрешности определения первого критического параметра нагрузки от относительного числа основных расчетных координат

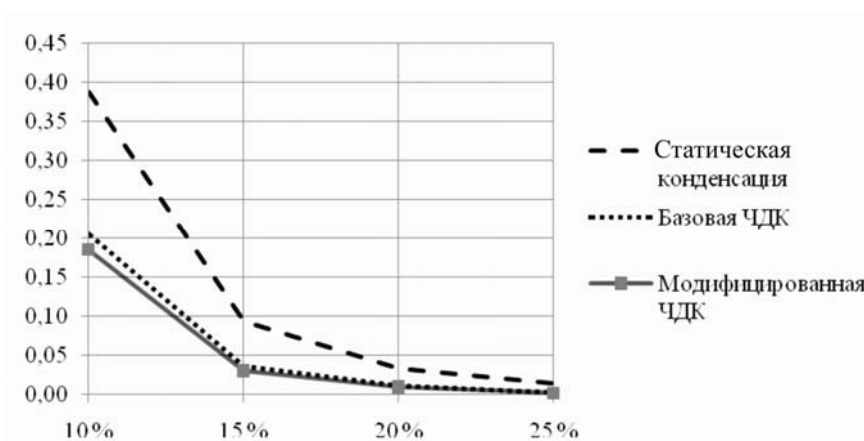


Рис. 2. Зависимость погрешности определения второго критического параметра нагрузки от относительного числа основных расчетных координат

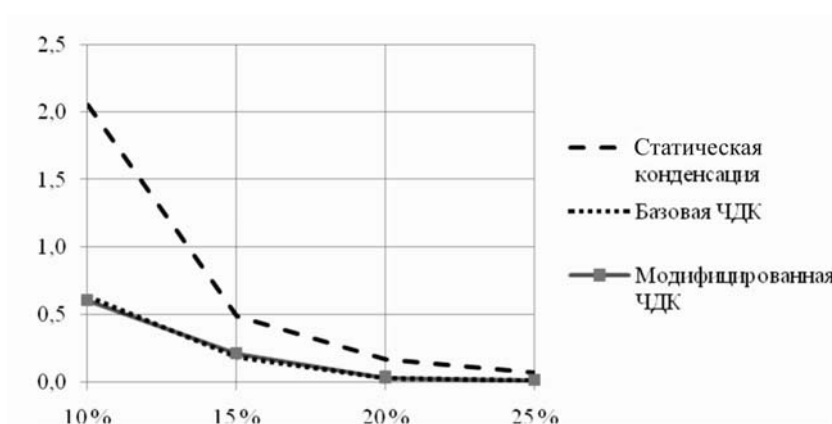


Рис. 3. Зависимость погрешности определения третьего критического параметра нагрузки от относительного числа основных расчетных координат

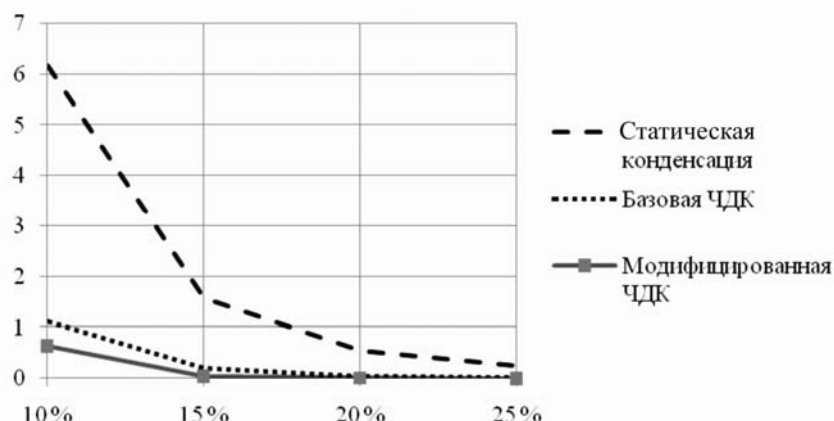


Рис. 4. Зависимость погрешности определения четвертого критического параметра нагрузки от относительного числа основных расчетных координат

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие *выводы*.

1. Увеличение числа принимаемых за основные степеней свободы приводит к повышению точности получаемых результатов.

2. Количество вводимых парциальных систем не оказывает существенного влияния на результат, но влияет на снижение объема производимых вычислений благодаря замене громоздких операций с большими матрицами на ряд последовательных операций с матрицами малых размеров.

3. Базовый и модифицированный алгоритмы ЧДК дают существенно улучшенные, по сравнению со статической конденсацией, результаты.

4. Преимущества модифицированного алгоритма последовательной ЧДК наиболее полно проявляются в самых «неудобных» для любого редуционного алгоритма режимах — определение нескольких (а не только младшего) собственных значений спектра при чрезвычайно малом числе оставляемых в расчете основных координат.

Все вышеизложенное позволяет рекомендовать модифицированный алгоритм последовательной частотно-динамической конденсации как сравнительно несложный, надежный и эффективный алгоритм решения неполной алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов для матриц большой размерности как в задачах общей устойчивости конструкций, так и в математически родственных им задачах динамики [2—4].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Guyan R. J. Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. № 2. P. 380.
2. Игнатьев В. А. Редуционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем. Саратов: Саратовский ун-т, 1992. 145 с.
3. Игнатьев В. А. Модифицированный метод последовательной частотно-динамической конденсации // Academia. Архитектура и строительство. 2011. № 2. С. 100—103.
4. Игнатьев В. А., Чантуридзе А. У. Метод частотно-динамической конденсации // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Строительство и архитектура. 2011. Вып. 24(43). С. 46—53.
5. Катеринин К. В. Блочные варианты редуционных алгоритмов решения неполной проблемы собственных значений // Сб. науч. тр. по материалам междунар. науч.-практ. конф., 03.04.2014 : в 7 ч. М. : АР-Консалт, 2014. Ч. 1. С. 47—49.

6. Катеринин К. В. Развитие и применение метода последовательной частотно-динамической конденсации к решению задач устойчивости сложных систем : дисс... канд. техн. наук. Волгоград, 2000. 117 с.

7. Игнат'ев В. А., Ромашкин В. Н. Определение редуцированного спектра частот и форм свободных колебаний систем с большим числом степеней свободы на основе сплайн-коллокационной конденсации // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Строительство и архитектура. 2014. Вып. 35(54). С. 140—151.

8. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников. М. : Стройиздат, 1984. 415 с.

1. Guyan R. J. Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. № 2. P. 380.

2. Ignat'ev V. A. Reduktsionnye metody rascheta v statike i dinamike plastinchatykh sistem. Saratov: Saratovskii un-t, 1992. 145 s.

3. Ignat'ev V. A. Modifitsirovannyi metod posledovatel'noi chastotno-dinamicheskoi kondensatsii // Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo. 2011. № 2. S. 100—103.

4. Ignat'ev V. A., Chanturidze A. U. Metod chastotno-dinamicheskoi kondensatsii // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Ser.: Stroitel'stvo i arkhitektura. 2011. Vyp. 24(43). S. 46—53.

5. Katerinin K. V. Blochnye varianty reduktsionnykh algoritmov resheniya nepolnoi problemy sobstvennykh znachenii // Sb. nauch. tr. po materialam mezhdunar. nauch.-prakt. konf., 03.04.2014 : v 7 ch. M. : AR-Konsalt, 2014. Ch. 1. S. 47—49.

6. Katerinin K. V. Razvitie i primeneniye metoda posledovatel'noi chastotno-dinamicheskoi kondensatsii k resheniyu zadach ustoychivosti slozhnykh sistem : diss. na soisk. uch. st. kand. tekhn. nauk. Volgograd, 2000. 117 s.

7. Ignat'ev V. A., Romashkin V. N. Opredeleniye redutsirovannogo spektra chastot i form svobodnykh kolebaniy sistem s bol'shim chislom stepenei svobody na osnove splain-kollokatsionnoi kondensatsii // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Ser.: Stroitel'stvo i arkhitektura. 2014. Vyp. 35(54). S. 140—151.

8. Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustoychivost' sooruzhenii / A. F. Smirnov, A. V. Aleksandrov, B. Ya. Lashchenikov, N. N. Shaposhnikov. M. : Stroizdat, 1984. 415 s.

© Катеринин К. В., 2015

Поступила в редакцию  
в марте 2015 г.

Ссылка для цитирования:

Катеринин К. В. Исследование общей устойчивости конструкций с применением модифицированного метода последовательной частотно-динамической конденсации // Интернет-вестник ВолГАСУ. 2015. Вып. 3(39). Ст. 4. Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>

For citation:

Katerinin K. V. [Research of overall stability of constructions using modified method of consequential frequency-dynamic condensation]. *Internet-Vestnik VolGASU*, 2015, no. 3(39), paper 4. (In Russ.). Available at: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>