

УДК 624.131.37

А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, В. В. Подтелков, О. В. Ермаков, Л. А. Анисимов**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ
СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ГРУНТА
ДЛЯ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ НАГРУЖЕННЫХ ОТКОСОВ**

Обозначены основные этапы решения задачи о нахождении областей пластических деформаций в грунтовом массиве в смешанной постановке: представлены формулы для вычисления напряжений внутри пластических областей и выражения, позволяющие определить положение, размеры и форму последних. Приведены графические изображения областей пластических деформаций в моделях однородных нагруженных откосов и реальном грунтовом массиве при разрушающих нагрузках, полученных экспериментально и в результате наблюдений.

Ключевые слова: смешанная задача теории упругости и теории пластичности грунта, компоненты напряжения в упругих и пластических областях, формулы для определения размера, положения и формы упругих и пластических областей, разрушение моделей нагруженных откосов.

The authors mark the main stages in the problem solution of finding areas of plastic deformations in soil massif in mixed formulation: formulas for calculation of tension in plastic areas that allow to define the location, sizes and form of the latest are presented. Graphics of areas of plastic deformations in models of simultaneously loaded slopes and real soil massif with destructive loads received experimentally and as the result of observation are provided.

Key words: mixed problem of the elasticity theory and the soil plasticity theory, components of tension in elastic and plastic areas, formulas for determination of the elastic and plastic areas size, location and form, destruction of models of loaded slopes.

Введение. При расчете устойчивости грунтовых откосов исходя из условия отсутствия в приоткосной области пластических зон поля напряжений могут быть определены на основе использования аналитических или численных методов, формализующих решения задач линейной теории упругости, как это сделано в работах [1—6].

Если при проведении расчета по каким-либо причинам необходимо определить области пластических деформаций, то используют условие прочности Кулона [7]. Однако эти пластические области (ПО) не являются истинными. Причина заключается в том, что в точках, расположенных внутри этих ОП, напряжения не могут отыскиваться методами теории упругости, т. к. здесь они не только являются функциями главного вектора нагрузок, но и зависят от физико-механических свойств грунтового массива. Поэтому области пластических деформаций, положение и форма которых в большей степени соответствуют действительности, могут быть найдены путем решения *смешанной* задачи теории упругости и теории пластичности грунта.

1. Постановка задачи. Постановка смешанной задачи имеет следующие особенности. До тех пор, пока интенсивность внешней нагрузки невелика, области предельного состояния в массиве грунта отсутствуют. При достижении ею некоторого предельного значения $q_{\text{зр}}$ в грунте зарождается одна или несколько пластических областей, которые имеют четкие границы. Дальнейший рост нагрузки ведет к увеличению размеров пластических областей, на внутренних поверхностях границ и внутри которых грунт находится в пластическом состоянии, описываемом теорией предельного равновесия, а часть

грунтового массива, расположенная вне границ областей пластических деформаций, находится в упругом состоянии. В некоторый момент времени нагрузка достигает второго предельного значения $q_{пр}$, при котором пластическая область выходит на поверхность откоса и происходит его разрушение.

Физическая модель смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта подразумевает, что: а) между упругими и пластическими областями имеется четкая граница. Грунт, находящийся в упругих областях, подчиняется законам линейной теории упругости, а в пластических — законам теории пластичности; б) и в упругих, и в пластических областях, а также на их границах выполняются уравнения равновесия; в) в каждой точке границы выполняется условие неразрывности поля напряжений: нормальные и касательные к границе напряжения должны быть одинаковыми по обеим ее сторонам; г) в областях линейной деформируемости выполняется условие совместности деформаций, а внутри пластических областей — условие пластичности.

Таким образом, смешанная задача позволяет соединить решение задачи линейной теории упругости для начальной стадии нагружения и решение задачи теории предельного равновесия для стадии разрушения, что очень важно с точки зрения разработки единой теории, описывающей поведение грунтового массива в полном интервале нагрузок.

Аналитическое решение задачи связано с разрешением системы дифференциальных уравнений равновесия, уравнения неразрывности деформаций и условия пластичности, которые для плоской задачи записываются следующим образом (оси X и Z направлены вправо и вертикально вниз):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + Z &= 0; \end{aligned} \right\}; \quad (1)$$

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_z) = -\frac{1}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \quad (2)$$

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = (\sigma_x + \sigma_z + 2\sigma_{св})^2 \sin^2 \varphi, \quad (3)$$

где σ_z , σ_x , τ_{xz} — вертикальная, горизонтальная и касательная составляющие напряжения в рассматриваемой точке; X , Z — проекции главного вектора нагрузок на соответствующие оси координат; $\sigma_{св} = C \operatorname{ctg} \varphi$ — давление связности; C , φ и μ — соответственно удельное сцепление, угол внутреннего трения и коэффициент Пуассона грунта, связанный известным соотношением с коэффициентом бокового распора; ∇^2 — оператор Лапласа.

2. Определение напряжений внутри пластических областей. Считаем, что «упругие» компоненты напряжения σ_z , σ_x , τ_{xz} определены в каждой точке грунтового массива аналитическими или численными методами. Воспользуемся результатами, приведенными в работе [8], развивая их в предположении о том, что в момент «перехода» точки грунтового массива в процессе нагружения из упругой в пластическую область величина нормального

вертикального напряжения σ_z , вычисленная от действия собственного веса грунта и внешней нагрузки на основе «упругого» решения, практически не изменяется [9].

Тогда выражения для вычисления значений компонент напряжения в точках пластической области (помечены знаком «'») запишем в виде [9]

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_z &= \sigma_z; \\ \sigma'_x &= \frac{\sigma_z(l - \sin \varphi) - 2\sigma_{cb} \sin \varphi}{l + \sin \varphi}; \\ \tau'_{xz} &= \frac{(\sigma_z + \sigma_{cb})b \sin \varphi}{l + \sin \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где σ_z — вертикальное нормальное напряжение, найденное из решения соответствующей задачи теории упругости; $b = \operatorname{tg} 2\alpha^*$; $l = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}$;
 $\alpha^* = \alpha - \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$.

Значение угла α определим из условия минимальности коэффициента остаточного сопротивления сдвигу [9], который определяется выражением

$$f = \frac{(\sigma_n + \sigma_{cb})\operatorname{tg} \varphi - \tau_n}{\tau_n}, \quad (5)$$

где σ_n , τ_n — нормальное и касательное напряжения, действующие по наклонной площадке, ориентированной под углом α .

Используем для этого условия $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} > 0$ и соотношения, связы-

вающие σ_n , τ_n и компоненты напряжения σ_z , σ_x , τ_{xz} .

Отметим, что в случае идеально связной среды ($\varphi = 0$) формулы (4) дают гидростатический закон распределения напряжений в пластической области.

3. Определение границы между областями упругих и пластических деформаций. Пусть кривая AA' есть граница между упругой и пластическими областями, и точка В лежит на этой кривой (рис. 1, а). Рассмотрим равновесие бесконечно малой прямоугольной призмы единичной высоты ДЕКМ, расположенной таким образом, что точка В лежит на ее диагонали, а сама диагональ ДК является касательной к кривой AA' в точке В. Разделим прямоугольную призму ДЕКМ на две треугольные призмы ДЕК и ДМК таким образом, что первая из них будет находиться в области упругих деформаций, а вторая — в пластической области. Учитывая, что уравнения равновесия выполняются во всем объеме грунтового массива, составим их для обеих призм и выразим отсюда нормальные и касательные составляющие напряжения, действующего на наклонным граням призм ДЕК и ДМК через компоненты полного напряжения σ_z , σ_x , τ_{xz} и σ'_z , σ'_x , τ'_{xz} .

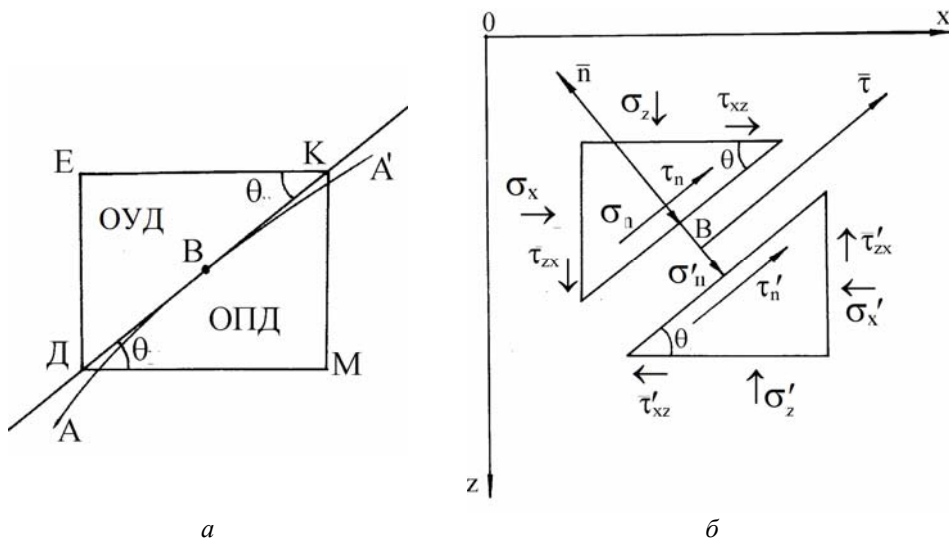


Рис. 1. Элементарная призма грунта на границе упругой и пластической областей (а); схема для составления уравнений равновесия (б)

Затем, учитывая, что $\tau_n = \tau'_n$; $\sigma_n = \sigma'_n$, а $\sigma_z = \sigma'_z$ и σ'_x , τ'_{xz} определяются формулами (4), получим выражения, описывающие границу упругих и пластических областей [9]:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(\tau_{zx} + \tau'_{zx})}{2\sigma'_x - \sigma_x - \sigma'_z}, \quad (6)$$

$$\sin \varphi_\theta = \frac{l(\sigma_z(3 + \cos 2\theta) + \sigma_x(1 - \cos 2\theta) + 2\tau_{zx} \sin 2\theta)}{-(\sigma_z + \sigma_x) + 2\sigma_{cb} + \cos 2\theta(\sigma_x - 3\sigma_z - 2\sigma_{cb}) - 2\sin 2\theta(\tau_{zx} + b(\sigma_z + \sigma_{cb}))}, \quad (7)$$

где θ — угол между касательной к границе AA' в точке B и положительным направлением оси OX; φ_θ — «граничное» значение угла внутреннего трения грунта.

Точка, в которой величина угла θ совпадает с величиной, вычисленной по формуле (6), и выполняется условие $\varphi_\theta = \varphi$, принадлежит границе упругой и пластической областей. Понятно, что в упругой области вне зависимости от положения в ней рассматриваемой точки $\varphi = \text{const}$. В пластической области величина, эквивалентная углу внутреннего трения, в разных точках не постоянна ($\varphi_\theta \neq \text{const}$), но при приближении точки к границе $\varphi_\theta \rightarrow \varphi$.

Посмотрим, в каком направлении будет проходить зарождение пластических областей. Направление луча, вдоль которого развиваются зоны пластических деформаций, определяется направлением максимальных касательных напряжений. Беря производные $\frac{d\tau_n}{d\theta}$, $\frac{d\tau'_n}{d\theta}$, приравняв их и имея в виду формулы (4), получим выражение, определяющее это направление:

$$\operatorname{tg} 2\theta_3 = \frac{l(\sigma_x - \sigma_z) + (\sigma_x - 2\sigma_{\text{св}} - 3\sigma_z)\sin\varphi}{2\{\sin\varphi[(\sigma_z + \sigma_{\text{св}})b + \tau_{xz}] + \tau_{xz}l\}}, \quad (8)$$

где θ_3 — угол наклона луча, вдоль которого происходит зарождение области пластических деформаций.

Как известно, в случае идеально связной среды касательные к обоим семействам поверхностей разрушения совпадают с направлением максимального касательного напряжения в рассматриваемой точке грунтового массива. Если в формуле (8) положить $\varphi = 0$, то она примет хорошо известный в теории упругости вид

$$\operatorname{tg} 2\theta_3 = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{xz}}. \quad (9)$$

4. Рассмотрим несколько примеров определения пластических областей в моделях нагруженных откосов, подвергшихся разрушению в лабораторных условиях, и в реальных объектах.

Пример 1. В работе [10] приведены результаты экспериментов по разрушению моделей из эквивалентных материалов, выполненных одним из авторов настоящей статьи совместно с В. К. Цветковым и А. А. Новожеиным. В качестве одного из таких материалов использовалась смесь речного песка с машинным маслом в процентном соотношении 97 % к 3 %. Физико-механические характеристики этой смеси при послойном уплотнении и соответствующие толщине слоя 0,25 м следующие: удельный вес $\gamma = 15,21 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$; удельное сцепление $C = 490,5 \text{ Па}$; угол внутреннего трения $\varphi = 24^\circ$.

В экспериментальном лотке размерами в плане $150 \times 60 \text{ см}$ и высотой 80 см формировали модели откосов высотой $H = 30 \text{ см}$ и углом заложения $\beta = 65^\circ$. Нагрузкой служит прямоугольный сосуд размерами в плане $0,6 \times 0,5 \text{ м}$, устанавливаемый на расстояниях $b = 0; 0,25H; 0,5H$ от бровки модели откоса и наполняемый водой до разрушения модели. Суммарный вес сосуда и воды, отнесенный к площади его основания, определяет величину интенсивности разрушающей равномерно распределенной нагрузки q_p . При $b = 0$ среднее значение (по результатам 10 опытов) $q_p = 1,839 \cdot 10^3 \text{ Па} = 0,365\gamma H$; при $b = 0,25H$ $q_p = 7,8 \cdot 10^2 \text{ Па} = 0,155\gamma H$, а при $b = 0,5H$ $q_p = 1,39 \cdot 10^3 \text{ Па} = 0,275\gamma H$. Значение коэффициента бокового распора принято равным $\mu = 0,75$, что соответствует среднему значению для глинистых грунтов.

Расчетные значения коэффициентов запаса устойчивости, полученные методом [11], который не учитывает образования пластических областей, оказались равными $K_0 = K_{0,25} = 0,97$; $K_{0,5} = 1,02$, т. е. отличаются от единицы не более чем на 3 %, что и соответствует факту разрушения моделей при данных значениях внешней нагрузки.

На рис. 2 приведены области пластических деформаций, построенные при помощи компьютерной программы [12], в которой формализовано решение смешанной задачи [9] для описанных выше условий. Как видно, во всех трех случаях области пластических деформаций имеют такие размеры и фор-

му, что равновесное состояние моделей невозможно. На рис. 2, *а* приведено изображение поверхности скольжения, полученной экспериментально [10]. Как видно, она практически полностью находится в пластической области.

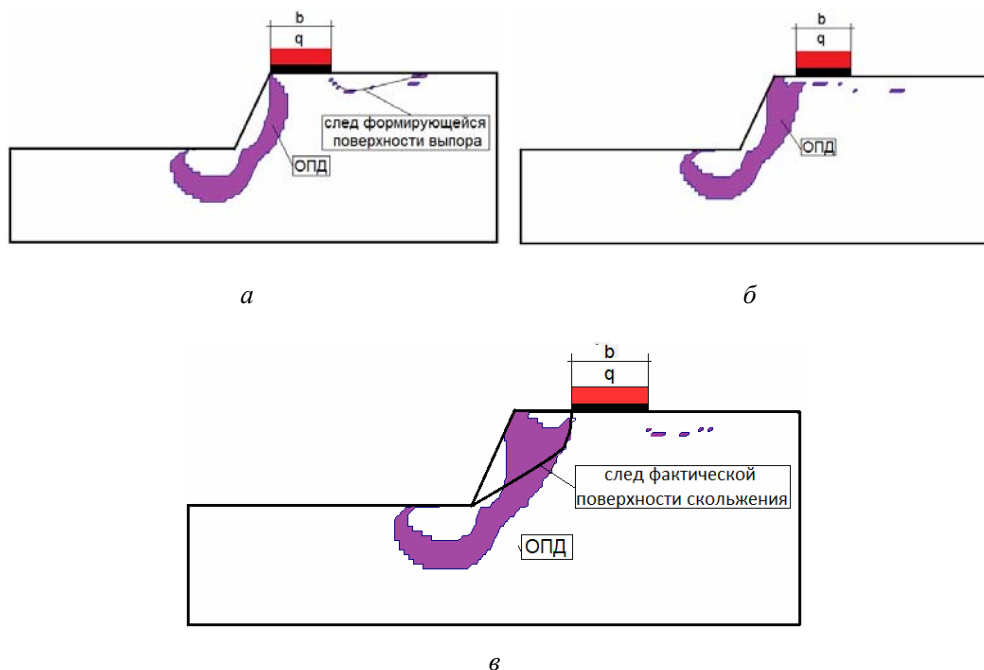


Рис. 2. Области пластических деформаций, построенные на основании смешанного решения [2], в моделях из песчано-масляной смеси для условий работы [3] (*а*—*б*); экспериментально полученная поверхность скольжения в момент потери устойчивости моделью нагруженного откоса (*в*) (по данным [3])

Пример 2. В работе [13] описано моделирование процесса разрушения нагруженных моделей откосов из эквивалентных материалов, в результате которого определены геометрия тел обрушения и величины предельных разрушающих сил P_p (обозначение и терминология работы [13]) при различных размерах площадок нагружения.

В качестве эквивалентного материала использована смесь из свинцовой дроби, песка и машинного масла, физико-механические свойства которой имеют следующие значения: $C = 0,52$ кПа; $\varphi = 30^\circ$; $\gamma = 36,6$ кН/м³. Угол модели откоса равен $\beta = 45^\circ$, а ее высота $H = 0,5$ м.

В одном из описанных в работе [13] эксперименте по моделированию процесса разрушения откосов размеры нагруженной площадки (штампа) были равны $0,04 \times 0,16$ м, а величина разрушающей силы, полученной в результате эксперимента, оказалась равной $P_p = 63$ Н. Площадка нагружения расположена у бровки модели откоса параллельно ей.

На рис. 3 изображена область пластических деформаций в модели нагруженного откоса, построенная при помощи компьютерной программы [12], для условий, соответствующих моменту разрушения, по данным работы [13].

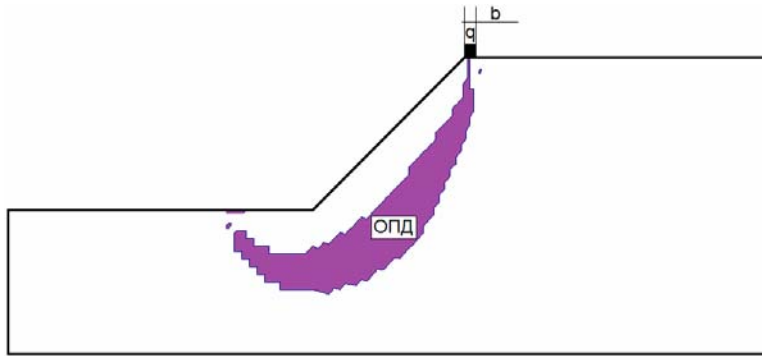


Рис. 3. Область пластических деформаций в модели нагруженного откоса, построенная по данным работы [6] при помощи решения [2]

Пример 3. В работе [14] описан случай, когда в Германии на участке «Лейпциг — Зейц» на карьере Цинзендорф в экскаваторном уступе высотой $H = 17$ м и углом $\beta = 35^\circ$ образовался оползень, который привел к аварии отвального моста. Автором [14] приведены следующие данные о физико-механических свойствах грунтов и параметрах внешней нагрузки: $\varphi = 21^\circ$; $C = 17,15$ кПа; $\gamma = 17,64$ кН/м³. Ширина базы экскаватора $b = 7$ м, а интенсивность нагрузки на основание $q = 441$ кПа. Экскаватор находился у края уступа, а поверхность разрушения образовалась непосредственно за ним (рис. 4).

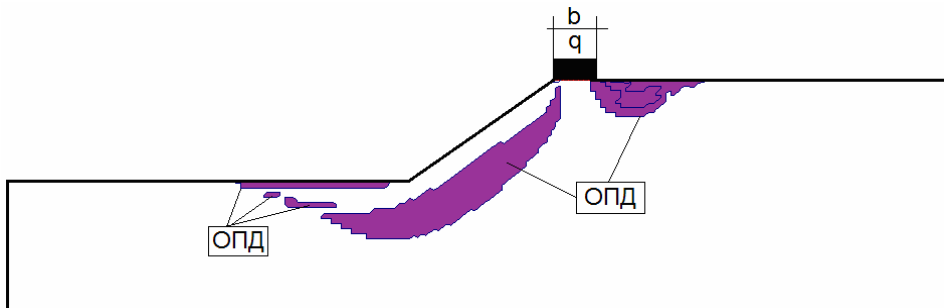


Рис. 4. Области пластических деформаций в разрушившемся экскаваторном уступе, построенные по данным работы [14] на основе смешанного решения [9]

В результате расчета устойчивости уступа, нагруженного весом экскаватора, проведенного автором работы [14] методом К. Терцаги [15], величина коэффициента запаса устойчивости получена равной $K = 1,19$, что, естественно, противоречит реальному положению дел, т. к. откос потерял устойчивость. Данное обстоятельство находит объяснение у автора работы [14] в неточности определения физико-механических свойств грунтов.

На рис. 4 изображены области пластических деформаций в разрушившемся экскаваторном уступе, построенные по данным работы [14] на основе смешанного решения [9]. Как видно, одна из пластических областей начинается под левым краем нагрузки и выходит на поверхность откоса в его подошве. Вторая правая пластическая область по форме весьма напоминает призму выпора грунта из-под штампа. В работе [14] приведена фотография

объекта, из которой видно, что характер его разрушения соответствует построенным при помощи компьютера областям пластических деформаций.

Пример 4. В работе [16] приведен расчет устойчивости откосов отвала меловых пород ОАО «Стойленский ГОК», который размещен в отроге Крутой Лог балки Чуфичева. Авторами статьи отмечается, что «оценку устойчивости откосных сооружений хвостохранилищ и гидроотвалов следует производить с учетом сил гидростатического взвешивания и гидростатического давления, а также нестабилизированного состояния водонасыщенных пород. Для расчета устойчивости нестабилизированных породных масс сухих и гидравлических отвалов наиболее пригодны методы алгебраического суммирования сил (при монотонной криволинейной поверхности скольжения) и многоугольника сил».

На рис. 5 изображена расчетная схема профиля III—III, для которого определен наихудший коэффициент запаса устойчивости $K = 1,03$; здесь же приведены значения физико-механических свойств слагающих пород [16].

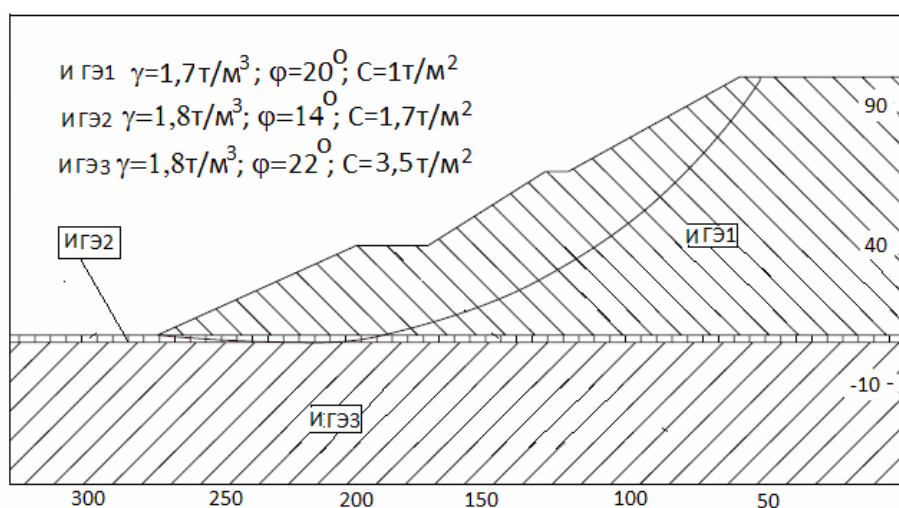


Рис. 5. Расчетная схема откоса по профилю III—III и значения физико-механических свойств слагающих пород

Нами при помощи компьютерной программы [12] выполнены два варианта расчета устойчивости данного объекта на основе анализа напряженного состояния грунтового массива:

1) при условии упругого распределения напряжений в приоткосной области, когда в качестве инструмента построения границы областей пластических деформаций используется известное условие пластичности (10)

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = (\sigma_x + \sigma_z + 2\sigma_{св})^2 \sin^2 \varphi, \quad (10)$$

где σ_x , σ_z и τ_{xz} — безразмерные (в долях γh) компоненты полного напряжения в той же точке; $\sigma_{св} = C(\gamma h \text{tg} \varphi)^{-1}$ — приведенное давление связности (C ; φ ; γ — соответственно сцепление, угол внутреннего трения, объемный вес грунта);

2) на основе решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта, приведенного выше.

В результате расчета по первому варианту оказалось, что при выполнении всех рекомендаций работы [16] и учете наличия слабого прослоя величина коэффициента запаса устойчивости для профиля III—III, вычисленная при величине коэффициента бокового давления $\xi_0 = 0,5$, равна $K_{0,5} = 1,23$. Отметим, что это значение ξ_0 выбрано не случайно, а получено после подстановки величины угла внутреннего трения $\varphi = 20^\circ$ (см. рис. 5) в известную формулу [5]

$$\xi_0 = \operatorname{tg}^2(\pi/4 + \varphi/2). \quad (11)$$

Если положить $\xi_0 = 0,23$ (это значение определено подбором), то получим величину коэффициента запаса устойчивости $K_{0,23} = 1,03$, как и в цитируемой работе.

На рис. 6 в качестве примера изображены картины изолиний горизонтальных σ_x напряжений и областей пластических деформаций в откосе отвала по профилю III—III при $\xi_0 = 0,5$ и $\xi_0 = 0,23$.

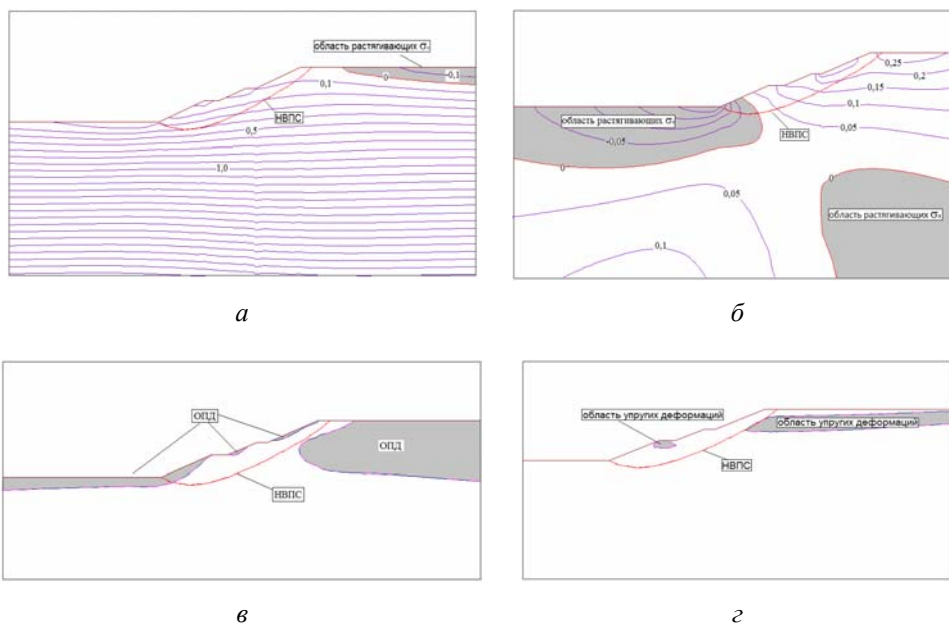


Рис. 6. Картины изолиний безразмерных (в долях γH) горизонтальных σ_x напряжений и областей пластических деформаций в откосе отвала по профилю III—III при $\xi_0 = 0,5$ (а, б) и $\xi_0 = 0,23$ (в, г)

Анализ рисунков показывает, что при $\xi_0 = 0,5$ поле горизонтальных напряжений спокойное, без возмущений, а призма скольжения практически полностью находится вне областей пластических деформаций (ОПД). Откос при этом не теряет общей устойчивости, а образуются только локальные зоны сдвигов, совпадающие с пластическими областями, расположенными на поверхности призмы возможного обрушения. При $\xi_0 = 0,23$ поле горизонтальных напряжений существенным образом трансформируется, возникают значительные по размерам области растягивающих σ_x напряжений, и практически весь грунтовый массив переходит в пластическое состояние.

На рис. 7 приведены изображения областей пластических деформаций, полученных на основе проведения второго варианта расчета при двух значениях коэффициента бокового давления грунта $\xi_0 = 0,5$ (рис. 7, а) и $\xi_0 = 0,23$ (рис. 7, б).

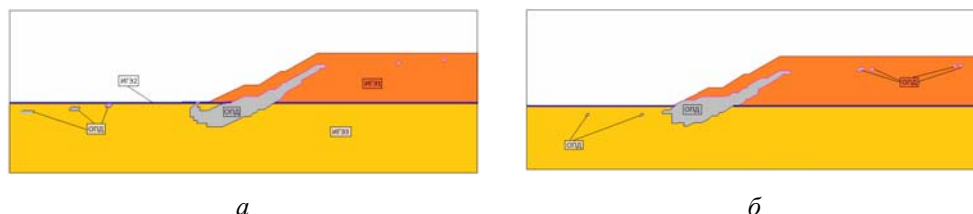


Рис. 7. Области пластических деформаций, построенные в приоткосной зоне по профилю III—III на основании «смешанного» решения

Анализ рис. 6 и 7 показывает, что уже при величине $\xi_0 = 0,5$ область пластических деформаций распространяется от подошвы до самого верха отвала и при этом в нижней своей части выходит на земную поверхность. Нижняя граница ОПД практически совпадает с наиболее вероятной поверхностью скольжения (НВПС), изображенной на рис. 6. Если $\xi_0 = 0,23$, то длина ОПД практически не изменяется, однако происходит развитие ее нижней части, которая широким фронтом выходит на поверхность грунта в месте перехода откоса отвала в подошву. При этом можно сделать вывод, что в обоих случаях отвал находится в крайне неустойчивом состоянии. Таким образом, результаты расчета в «смешанной» постановке в большей степени отвечают данным наблюдений, чем результаты расчета, выполненные в предположении упругого распределения напряжений в приоткосной области.

Пример 5. В работе [17] проведен расчет устойчивости «откосов старой набережной поселка Приморский с прилегающими к ней частями склона по профилю I—I. По данным инженерно-геологических изысканий, выполненных кооперативом «Геолог», основанием берегоукрепительных сооружений служит глина выветрелая, твердая со следующими физико-механическими свойствами: угол внутреннего трения $\varphi = 17^\circ$, удельное сцепление $C = 0,045$ МПа; объемный вес $\gamma = 1,85$ т/м³». Сведения о величине коэффициента бокового давления, как и в работе, описанной в предыдущем примере, отсутствуют. Используя формулу (13) получим, что $\xi_0 = 0,55$.

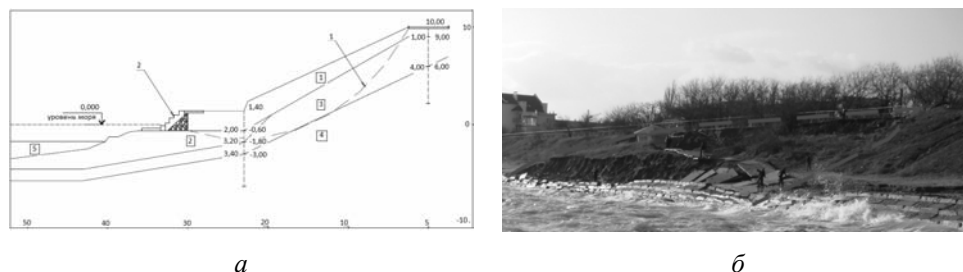


Рис. 8. Инженерно-геологический профиль I—I (а) и общий вид оползневого участка (б) (цит. по работе [6])

На рис. 9 приведено изображение инженерно-геологического профиля I—I, рассмотренного в работе [17], и фотография общего вида соответствующего оползневого участка.

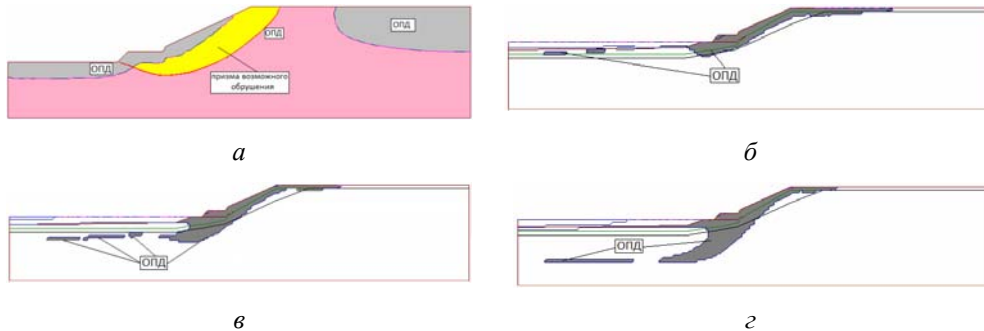


Рис. 9. Области пластических деформаций, построенные для оползневого участка по профилю I—I при условии упругого распределения напряжений в приоткосной области при $\xi_0 = 0,55$ (а) и на основании результатов «смешанного» решения при $\xi_0 = 0,55$ (б); $\xi_0 = 0,66$ (в); $\xi_0 = 0,75$ (г)

Как и в предыдущем примере области пластических деформаций построены на основании результатов «упругого» и «смешанного» решения и приведены на рис. 9. Анализ этих рисунков показывает, что область пластических деформаций, построенная исходя из упругого распределения напряжений в грунтовой массе (рис. 9, а), не полностью охватывает наклонную поверхность откоса, в то время как ОПД, построенные на основе «смешанного» решения (рис. 9, б—г), далеко заходят и на горизонтальную дневную поверхность. Как видно на фотографии, приведенной на рис. 9, б, данное обстоятельство соответствует реальному состоянию объекта: разрушение откоса набережной начинается с его верхней бермы. Это также подтверждается текстом, приведенным в работе [17]: «В пределах исследуемого района выделены участки... локальных сдвигов грунтовой массы. В верхней части набережной наблюдаются трещины закола. На отдельных участках склона имеются деформированные лестницы». Как видим, и в этом случае результаты «смешанного» решения в наибольшей степени совпадают с результатами натурных наблюдений. Из рис. 9, б—г также видно, что по мере увеличения величины коэффициента бокового давления грунта ξ_0 область пластических деформаций увеличивается в размерах, получает развитие рогообразная ее часть, направленная под подошву откоса.

Пример 6. В работе [18] рассматривается вопрос об отыскании областей пластических деформаций в однородном грунтовой откосе. В качестве объекта исследования выбран однородный склон, параметры которого приведены в [19]: «высота склона $h = 20$ м, заложение $1:m \approx 1:2,4$; грунт — суглинок тугопластический $\gamma = 20,7$ кН/м³, $E = 45$ МПа, $\nu = 0,35$ (согласно известной формуле, связывающей величину коэффициента Пуассона с величиной коэффициента бокового давления, $\xi_0 = 0,54$), $C = 20$ кПа, $\phi = 12^\circ$ ». Отмечено, что расчеты выполнены авторами при помощи компьютерной программы [12].

На рис. 10, *а* изображены области пластических деформаций (зоны «пластичности»), полученные авторами работы [18] для рассматриваемого склона при помощи [20]. Из рисунка видно, что в грунтовом массиве образовались три ОПД: первая, имеющая эллипсообразную форму, расположена в месте перехода откоса в подошву, что вполне обоснованно, т. к. здесь имеет место существенная концентрация напряжений; вторая ОПД имеет форму полосы и простирается по поверхности подошвы откоса, что также логично, т. к. здесь могут возникать растягивающие горизонтальные нормальные напряжения σ_x ; а вот объяснения наличия третьей ОПД, которая широкой полосой устремляется вглубь массива, мы не находим.

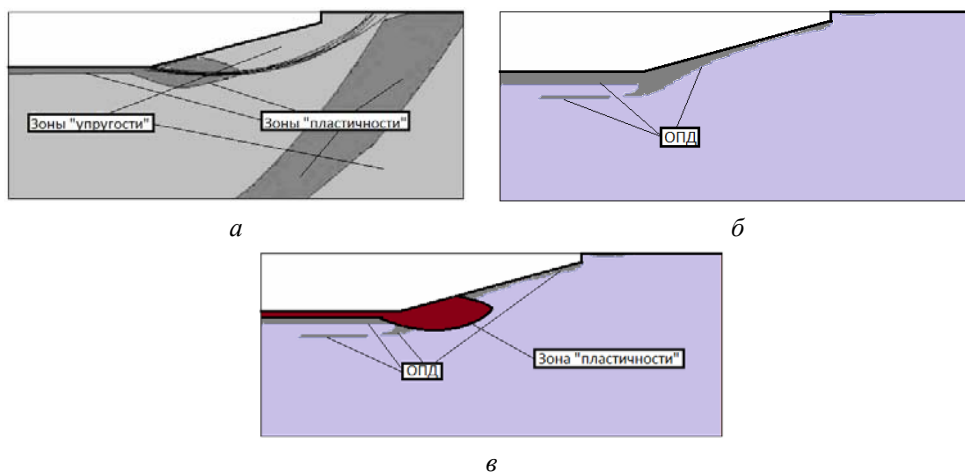


Рис. 10. Области пластических деформаций, полученные авторами [18] (*а*); области пластических деформаций, полученные нами при $\nu = 0,3$ ($\xi_0 = 0,54$) (*б*); наложение изображений областей пластических деформаций и зон пластичности друг на друга (*в*)

На рис. 10, *б* приведены области пластических деформаций, построенные нами для условий рассматриваемого примера на основе «смешанного» решения [2], а на рис. 10, *в* — наложение изображений ОПД, полученных авторами цитируемой работы и нами. Из рисунка видно, что площади областей пластических деформаций, расположенных в области перехода откоса в подошву, практически одинаковы; ширина ОПД, расположенной вдоль поверхности подошвы откоса, в нашем случае примерно в полтора раза больше. Основное отличие заключается в том, что в нашем случае полосовая пластическая область отсутствует, а основная ОПД имеет развитие по поверхности откоса вверх и влево под его подошву.

Пытаясь отыскать в научно-технической литературе результаты исследований, которые подтвердили бы возможность существования областей пластических деформаций подобной формы, мы обнаружили, что в работе [21] приведены изображения ОПД «грунта в основании днища шахты без закрепления грунта», которые представлены нами на рис. 11, *а*.

Далее, предположив, что изображение на рис. 10 можно рассматривать как половину грунтовой выемки трапецевидного сечения, мы, не изменяя численных значений физико-механических свойств грунта и геометрических

размеров, кроме угла заложения откоса, который теперь принят равным 90° , построили области пластических деформаций в основании выемки прямоугольного сечения по предлагаемой нами методике, которые приведены на рис. 11, б.

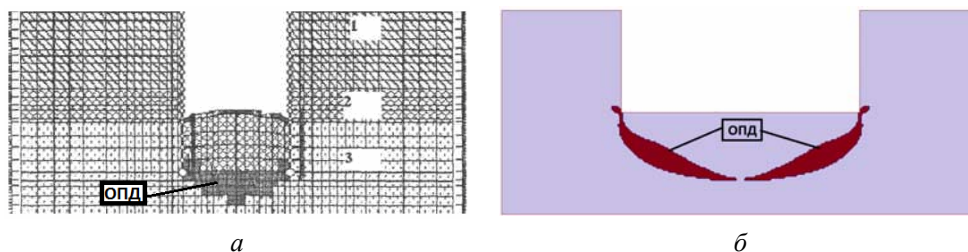


Рис. 11. Области пластических деформаций в основании дна шахты без закрепления грунта по данным работы [21] (а); ОПД под дном прямоугольной выемки, построенные на основе «смешанного» решения [2] (б)

Сравнивая приведенные на рис. 11 изображения, видим, что в обоих случаях ОПД развиваются под подошву выемки. Это обстоятельство может служить качественным подтверждением справедливости полученных нами результатов.

Выводы.

1. Приведены выражения, позволяющие проводить построение областей пластических деформаций в рамках приближенного аналитического решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта. Получаемые при этом пластические области удовлетворительно согласуются с результатами лабораторных исследований процесса разрушения моделей откосов из эквивалентных материалов при нагружении и натурными наблюдениями. В связи с этим считаем возможным рекомендовать предложенный подход для оценки устойчивости нагруженных откосов.

2. Результаты построения областей пластических деформаций на основе приближенного аналитического решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта позволяют адекватно оценить степень устойчивости реальных грунтовых откосов с целью предотвращения техногенных катастроф, о чем говорит их удовлетворительное совпадение с результатами натурных наблюдений. О том же свидетельствует качественное соответствие положения и форм областей пластических деформаций, полученных нами и независимо от нас другими авторами для вертикальных откосов грунтовых выработок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Tsvetkov V. K., Bogomolov A. N. Stability of multilevel terrace of inhomogeneous rock // Journal of Mining Science. 1996. № 32 (3). Pp. 192—196.
2. Цветков В. К., Богомолов А. Н. Исследование устойчивости многоярусных отвалов неоднородных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1996. № 3. С. 39—44.
3. Тырымов А. А. Численное моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния анизотропного массива горных пород на основе графового метода // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2012. № 5. С. 52—66.

4. *Desai C. S., Lightner J. G.* Mixed finite element procedure for Soil-Structure iteration and construction sequences // *Inter. J. for Numerical Methods in Engineering*. 1985. № 5. Vol. 21.
 5. *Nakoto S., Kiyoshi J.* Probabilistic finite element method for Slopes stability analysis // *Proc. Jap., Soc. Civil Engineering*. 1985. № 364.
 6. *Wang F. D., Sun M. C., Ropchan D. M.* Compyter Program for Pit Slope Stability Analysis bee the Finite Element Stress Analysis and Limiting Equilibrium Method // *RJ 7685. Burin of Mints*. 1972.
 7. *Coulomb C.* Application des riles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture // *Memories de savants strangers de L'Academlie des sciences de Paris*, 1773. 233 p.
 8. *Цветков В. К.* Расчет устойчивости однородных откосов при упругопластическом распределении напряжений в массиве горных пород // *Известия вузов. Горный журнал*. 1981. № 5. С. 45—52.
 9. *Богомолов А. Н.* Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке. Пермь: ПГТУ, 1996. 150 с.
 10. *Цветков В. К., Богомолов А. Н., Новоженкин А. А.* Расчет устойчивости однородных нагруженных откосов // *Повышение эффективности и надежности транспортных объектов: Труды. Межвузовский тематический сборник*. Вып. 183. Ростов н/Д : РИИЖТ, 1985. С. 84—88.
 11. *Цветков В. К.* Расчет устойчивости откосов и склонов. Волгоград: Нижне-Волжское кн. изд-во, 1979. 238 с.
 12. Устойчивость (напряженно-деформированное состояние) : свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ : пат. Рос. Федерации № 2009613499 / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, М. Ю. Нестратов, Н. Н. Нестратов, Н. Н. Потапова, М. М. Степанов, А. Н. Ушаков ; опубли. 18.12.2009, Бюл. № 23 ; заявл. 19.05.2009 ; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 30.06.2009. 1 с.
 13. *Мостахо Х.* Анализ устойчивости пригруженного откоса // *Фундаментостроение в условиях слабых и мерзлых грунтов: Межвузовский тематический сб. тр. Л.: ЛИСИ*, 1983. С. 149—157.
 14. *Мочак Г.* Оползни в результате имеющихся поверхностей скольжения и контактов слоев в ледниковых отложениях // *Материалы совещания по вопросам изучения оползней и мер борьбы с ними*. Киев : КГУ, 1964. С. 338—344.
 15. *Терцаги К.* Строительная механика грунта на основе его физических свойств. М.; Л. : Госстройиздат, 1933. 390 с.
 16. *Гальперин А. М., Крючков А. В., Семенов В. В.* Оценка устойчивости откосных сооружений отвально-хвостового хозяйства ОАО Стойленский ГОК // *Труды Международного научного симпозиума «Неделя горняка-2007»*. М. : МГГУ, 2007. С. 135—142.
 17. *Подвинцев А. В., Саломатин В. Н.* Мониторинг техногенного оползня набережной в поселке Приморский, город Феодосия // *Строительство и техногенная безопасность. Симферополь : НАПКС*, 2011. Вып. 38. С. 72—77.
 18. *Горшков Н. И., Краснов М. А.* Сравнительная оценка устойчивости и несущей способности системы «штамп — основание» на основе расчетов МКЭ // *Известия вузов. Строительство*. 2011. № 1. С. 70—78.
 19. *Маслов Н. Н.* Механика грунтов в практике строительства (Оползни и борьба с ними). М. : Стройиздат, 1977. 320 с.
 20. *Горшков Н. И., Краснов М. А.* Программа GenIDE32 для решения прикладных задач геомеханики / Система сертификации ГОСТ Р Госстандарт России. Сертификат соответствия № РОСС RU.СП15.Н00262. 21.09.2009.
 21. *Улицкий В. М., Алексеев С. И.* Обеспечение сохранности зданий при устройстве котлованов и прокладке инженерных сетей в Санкт-Петербурге // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. 2002. № 4. С. 17—21.
1. *Tsvetkov V. K., Bogomolov A. N.* Stability of multilevel terrace of inhomogeneous rock // *Journal of Mining Science*. 1996. № 32 (3). Pp. 192—196.
 2. *Tsvetkov V. K., Bogomolov A. N.* Issledovanie ustoichivosti mnogoyarusnykh otvalov neonorodnykh porod // *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*. 1996. № 3. S. 39—44.
 3. *Тырумов А. А.* Chislennoe modelirovanie i analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya anizotropnogo massiva gornyykh porod na osnove grafovogo metoda // *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*. 2012. № 5. S. 52—66.
 4. *Desai C. S., Lightner J. G.* Mixed finite element procedure for Soil-Structure iteration and construction sequences // *Inter. J. for Numerical Methods in Engineering*. 1985. № 5. Vol. 21.

5. Nakoto S., Kiyoshi J. Probabilistic finite element method for Slopes stability analysis // Proc. Jap., Soc. Civil Engineering. 1985. № 364.
6. Wang F. D., Sun M. C., Ropchan D. M. Compyter Program for Pit Slope Stability Analysis bee the Finite Element Stress Analysis and Limiting Equilibrium Method // RJ 7685. Burin of Mints. 1972.
7. Coulomb C. Application des riles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture // Memories de savants strangers de L'Academlie des sciences de Paris, 1773. 233 p.
8. Tsvetkov V. K. Raschet ustoichivosti odnorodnykh otkosov pri uprugoplasticheskom raspredelenii napryazhenii v massive gornykh porod // Izvestiya vuzov. Gornyi zhurnal. 1981. № 5. S. 45—52.
9. Bogomolov A. N. Raschet nesushchei sposobnosti osnovanii sooruzhenii i ustoichivosti gruntovykh massivov v uprugoplasticheskoi postanovke. Perm': PGTU, 1996. 150 s.
10. Tsvetkov V. K., Bogomolov A. N., Novozhenin A. A. Raschet ustoichivosti odnorodnykh nagruzhennykh otkosov // Povyshenie effektivnosti i nadezhnosti transportnykh ob"ektov: Trudy. Mezhvuzovskii tematiceskii sbornik. Vyp. 183. Rostov n/D : RIIZhT, 1985. S. 84—88.
11. Tsvetkov V. K. Raschet ustoichivosti otkosov i sklonov. Volgograd: Nizhne-Volzhskoe kn. izd-vo, 1979. 238 s.
12. Ustoichivost' (napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie) : svidetel'stvo o gos. registratsii programmy dlya EVM : pat. Ros. Federatsii № 2009613499 / A. N. Bogomolov, O. A. Bogomolova, M. Yu. Nestratov, N. N. Nestratov, N. N. Potapova, M. M. Stepanov, A. N. Ushakov ; opubl. 18.12.2009, Byul. № 23 ; zayavl. 19.05.2009 ; zareg. v Reestre programm dlya EVM 30.06.2009. 1 s.
13. Mostakho Kh. Analiz ustoichivosti prigruzhennogo otkosa // Fundamentostroenie v usloviyakh slabykh i merzlykh gruntov: Mezhvuzovskii tematiceskii sb. tr. L.: LISI, 1983. S. 149—157.
14. Mochak G. Opolzni v rezul'tate imeyushchikhsya poverkhnosti skol'zheniya i kontaktov sloev v lednikovyykh otlozheniyakh // Materialy soveshchaniya po voprosam izucheniya opolznei i mer bor'by s nimi. Kiev : KGU, 1964. S. 338—344.
15. Tertsagi K. Stroitel'naya mekhanika grunta na osnove ego fizicheskikh svoistv. M.; L. : Gosstroizdat, 1933. 390 s.
16. Gal'perin A. M., Kryuchkov A. V., Semenov V. V. Otsenka ustoichivosti otkosnykh sooruzhenii otval'no-khlostovogo khozyaistva OAO Stoilenskii GOK // Trudy Mezhdunarodnogo nauchnogo simpoziuma «Nedelya gornyaka-2007». M. : MGGU, 2007. S. 135—142.
17. Podvintsev A. V., Salomatin V. N. Monitoring tekhnogennogo opolznia naberezhnoi v poselke Primorskii, gorod Feodosiya // Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost'. Simferopol' : NAPKS, 2011. Vyp. 38. S. 72—77.
18. Gorshkov N. I., Krasnov M. A. Sravnitel'naya otsenka ustoichivosti i nesushchei sposobnosti sistemy «shtamp — osnovanie» na osnove raschetov MKE // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo. 2011. № 1. S. 70—78.
19. Maslov N. N. Mekhanika gruntov v praktike stroitel'stva (Opolzni i bor'ba s nimi). M. : Stroizdat, 1977. 320 s.
20. Gorshkov N. I., Krasnov M. A. Programma GenIDE32 dlya resheniya prikladnykh zadach geomekhaniki / Sistema sertifikatitsii GOST R Gosstandart Rossii. Sertifikat sootvetstviya № ROSS RU.SP15.N00262. 21.09.2009.
21. Ulitskii V. M., Alekseev S. I. Obespechenie sokhrannosti zdaniy pri ustroistve kotlovanov i prokladke inzhenernykh setei v Sankt-Peterburge // Osnovaniya, fundamente i mekhanika gruntov. 2002. № 4. S. 17—21.

© Богомолов А. Н., Богомолова О. А., Подтелков В. В., Ермаков О. В., Анисимов Л. А., 2015

Поступила в редакцию
в сентябре 2015 г.

Ссылка для цитирования:

Использование приближенного аналитического решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта для оценки устойчивости нагруженных откосов / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, В. В. Подтелков, О. В. Ермаков, Л. А. Анисимов // Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2015. Вып. 3(39). Ст. 3. Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>

For citation:

Bogomolov A. N., Bogomolova O. A., Podtelkov V. V., Ermakov O. V., Anisimov L. A. [Use of approximate analytical solution of mixed problem of the elasticity theory and the soil plasticity theory for the assessment of stability of loaded slopes]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2015, no. 3(39), paper 3. (In Russ.). Available at: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>