УДК 530.18, 535.14

И.В. Сочнев, М.Б. Белоненко

Ультракороткий лазерный импульс в двухуровневой среде С эффектом штарка

Получено эффективное уравнение, описывающее динамику ультракороткого лазерного импульса в двухуровневой среде с эффектом Штарка и имеющее вид неустойчивого уравнения Кадомцева — Петвиашвили. Проведена и проанализирована редукция, приводящая данное уравнение к цилиндрическому уравнению КДФ. Получено и исследовано асимптотическое решение, соответствующее учету в данных рассеяния для задачи Лакса цилиндрического уравнения КДФ состояния дискретного спектра.

In the present paper, an effective equation that looks like the nonequilibrium equation of Kadomtsev — Petviashvili and describes dynamics of an ultra-short laser impulse in two-level media with a Stark effect was got. The reduction that transforms this equation to cylindrical Korteweg-de Vries was performed and analyzed. It was got and elaborated an asymptotic equation of discrete spectra state corresponding to scattering in Laks problem for cylindrical Korteweg-de Vries.

Современные тенденции развития оптики, связанные с созданием мощных лазеров, привели к существенному прогрессу в изучении традиционных с точки зрения практики кристаллов [1—5]. В первую очередь это связано, с общей для всей современной физики парадигмой изучения нелинейных динамических процессов [6]. Применение мощных лазеров и уникальная точность оптических измерений позволили существенно продвинуться и в экспериментальном аспекте изучения нелинейных явлений.

Одной из интересных особенностей возбуждения нелинейных систем в диспергирующих средах с тем или иным типом упорядочения является возможность наблюдения в них устойчивого частицеподобного состояния (солитона). В оптике вышеупомянутые частицеподобные состояния хорошо известны и экспериментально исследованы, например, в таких задачах, как эффект самоиндуцированной прозрачности, и при анализе динамики ультракоротких световых импульсов в волоконных световодах [7—9]. Отметим только, что экспериментально наблюдаемые и теоретически исследуемые оптические солитоны являются в основном квазиодномерными. Вместе с тем хорошо известно, что эффекты, связанные с появлением дополнительного измерения, могут разрушить солитонное состояние и привести как к распаду импульса за счет дисперсии, увеличивающей свою роль при увеличении числа пространственных измерений, так и к его самофокусировке [10]. Все это делает задачу об исследовании динамики ультракороткого лазерного импульса в неквазиодномерном случае актуальной и требующей особого внимания.

Отметим также, что в общем случае электрическое поле распространяющегося лазерного импульса может и изменить характеристики среды, в которой импульс распространяется. Наиболее простым и физически интересным случаем такого изменения свойств среды будет, по всей видимости, случай эффекта Штарка, когда электрическое поле лазерного импульса изменяет расстояние между уровнями двухуровневой системы. Подобный эффект может, например, наблюдаться в системе молекулярных ионов водорода H_2^+, которые хорошо описываются двумя электронными уровнями для коротких межъядерных расстояний (меньших 4…5 а.е.): ${}^1S_g$ и ${}^1S_u$.

Гамильтониан двухуровневой среды с эффектом Штарка представим в виде

$$H = -\sum_j (\Delta + \alpha E) S_j^x + 2\mu_0 E S_j^z, \tag{1}$$

где Δ — разница энергий верхнего и нижнего энергетического уровня двухуровневой системы; α — параметр, ответственный за Штарковский сдвиг уровней; μ_0 — электрический дипольный момент двухуровневой системы; E — электрическое поле лазерного импульса; S_j^z — оператор поляризации j–й двухуровневой системы; S_j^x — оператор разности населенностей j-й двухуровневой системы. В этом случае уравнения движения Гейзенберга для средних значений операторов

$$\langle \dot{A} \rangle = -i\langle [A, H] \rangle, \ \langle \dot{S}_j^w \rangle = \partial \langle S_j^w \rangle / \partial t$$

будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{S}_j^x \rangle = 2\mu_0 E \langle S_j^y \rangle; \ \langle \dot{S}_j^y \rangle = (\Delta + \alpha E)\langle S_j^z \rangle - 2\mu_0 E \langle S_j^x \rangle; \\
&\langle \dot{S}_j^z \rangle = -(Д + \alpha E)\langle S_j^y \rangle.
\end{aligned} \tag{2}$$

Данные уравнения необходимо дополнить уравнением на электрическое поле лазерного импульса E, которое можно рассматривать, в силу большого числа фотонов в модах излучения, классически и записать:

$$\ddot{E} - c^2 (E_{\eta\eta} + E_{\zeta\zeta}) = -4\pi\mu_0 n_0 \langle \ddot{S}^z \rangle, \quad E_{\lambda\lambda} = \partial^2 E / \partial\lambda^2, \tag{3}$$

здесь n_0 — концентрация рассматриваемых двухуровневых систем; η, ζ — оси координат в нашем пространстве; c — скорость света [11].

Отметим, что здесь мы рассматриваем квазидвумерную задачу, предполагая, что фронт импульса плоский по третьему измерению. Это связано с тем, что именно в квазидвухмерном случае удается аналитически продвинуться при изучении асимптотических свойств ультракороткого импульса [12].

Из уравнений (2) можно выразить электрическое поле лазерного импульса E через поляризацию двухуровневой системы $\langle S^z \rangle = z$ с точностью до лидирующих нелинейных слагаемых:

$$2\mu_0 E = E_1 + E_2 + E_3,$$

$$E_1 = (\ddot{z} + Д^2 z) / ДM,$$

$$E_2 = \alpha \left\{ 2(\ddot{z} + Д^2 z) z / M - (\ddot{z} + Д^2 z)^2 / Д^2 M - \dot{z}(\dddot{z} + Д^2 \dot{z}) / Д^2 M \right\} / ДM , \quad (4)$$

$$E_3 = (\alpha^2 (\ddot{z} + Д^2 z)^2 z / (ДM)^2 - \alpha \dot{E}_2 \dot{z} + \alpha^2 (\ddot{z} + Д^2 z)(\dddot{z} + Д^2 \dot{z}) \dot{z} / Д^4 M^2 -$$

$$- 2\alpha(\ddot{z} + \Delta^2 z) E_2 / Д + (\ddot{z} + Д^2 z)(z^2 + \dot{z}^2 / Д^2) + 2Д\alpha E_2 z) / ДM ,$$

где M — температурное равновесное среднее значение разности населенностей рассматриваемых уровней нашей системы.

Подставим далее выражение (4) в уравнение на электрическое поле (3) и произведем многомасштабное разложение, ограничиваясь приближением волн, бегущих только в одну сторону [11, 13]. Делая замены переменных:

$$z = \varepsilon u, \;\; X = \varepsilon^{1/2}(\eta - vt), \;\; T = \varepsilon^{3/2} t, \;\; Y = \varepsilon \zeta ,$$

где ε — формально малый параметр, задающий масштаб времени, на котором играют основную роль эффекты нелинейности, легко получить следующее выражение для скорости распространения ультракороткого лазерного импульса в нашей среде:

$$v^2 = \frac{c^2}{1 + \chi M / \Delta}, \;\; \chi = 8\pi\mu_0^2 n_0 .$$

Отметим, что, как и следовало ожидать, учет свойств среды привел к тому, что ультракороткий импульс стал распространяться со скоростью, определяемой концентрацией двухуровневых систем и их дипольным моментом. Величина, на которую изменяется скорость распространения импульса, существенно зависит от величины M — температурного равновесного среднего значения разности населенностей рассматриваемых уровней нашей системы и определяется, в основном, температурой среды.

Сама динамика ультракороткого импульса в сделанных нами предположениях будет описываться уравнением Кадомцева — Петвиашвили:

$$\delta u_{XXXX} + \beta u_{XT} + \lambda u_{YY} + \gamma (u^2)_{XX} = 0 , \quad (5)$$

где величины $\delta, \; \beta, \; \lambda, \; \gamma$ определяются как

$$\delta = v^2 (v^2 - c^2) / ДM , \;\; \beta = -2v(\chi + Д / M),$$

$$\gamma = \alpha Д (v^2 - c^2) / M^2 , \;\; \lambda = -Дc^2 / M .$$

Отметим, что в силу знаков, которые имеют величины $\delta, \; \beta, \; \lambda, \; \gamma$, солитонные решения уравнений (5) неустойчивы. Такие знаки соответствуют так называемому положительному закону дисперсии. Решения типа лампов [14] в данном случае не будут обладать конечной энергией и будут представлять собой сингулярные решения, которые очевидно не обладают физической интерпритацией. Решения солитонного типа уравнений (5) будут неустойчивы по отношению к поперечным возмущениям [15].

Вместе с тем у уравнения (5) существуют асимптотические решения, которые сохраняют свою форму и устойчивы на больших временах. С математической точки зрения устойчивость таких решений обеспечивается тем, что они соответствуют решениям дискретного спектра в соответствующей задаче рассеяния [5—7]. Обезразмеривая уравнение (5):

$$u \longrightarrow ru,\ \ X \longrightarrow pX,\ \ Y \longrightarrow qY,\ \ T \longrightarrow sT,$$

$$r = (9\delta/\gamma^2)^{1/3},\ \ q = (-\lambda r)^{1/2},\ \ p = (\delta r)^{1/4},\ \ s = \beta r/p$$

и переходя к автомодельной замене переменных в выражении для неизвестной величины, а именно, положив, что на больших временах решение имеет вид:

$$u(X,Y,T) = u(X + Y^2/4T, T) = u(\xi, T),$$

приходим к так называемому цилиндрическому уравнению Кортевега де Фриза [16]:

$$u_T + u_{\xi\xi\xi} - 6uu_\xi + u/2T = 0. \qquad (6)$$

Особенностью последнего уравнения является то, что его можно проинтегрировать методом обратной задачи рассеяния и аналитически установить асимптотический характер решений. Так, спектральная задача для уравнения (6) является уравнением Шредингера с опорным потенциалом:

$$-\Psi_{\xi\xi}(\xi,\theta) + (\xi + u(\xi,T))\Psi(\xi,\theta) = \theta\Psi(\xi,\theta), \qquad (7)$$

где θ — спектральный параметр.

Заметим, что опорный потенциал ξ не может быть включен в функцию $u(\xi,T)$ в силу того, что мы ищем решение для уравнения (6) в классе быстро убывающих граничных условий:

$$u(\xi,T)_{\xi \longrightarrow \pm\infty} \longrightarrow 0.$$

Соответствующий оператор, описывающий временную динамику функций $\Psi(\xi,\theta)$, связан с оператором Шредингера (7) при помощи дисперсионного соотношения линеаризированного уравнения (6).

Обсуждаемое явное решение есть [16]:

$$u_s(\xi) = u_s(\xi - \tau, \theta),$$

$$u(y,\theta\ )_s = 2\theta\left\{2\frac{dAi(y)}{dy}Ai(y) + \theta(Ai(y))^4 G(y,\theta\right\}G(y,\theta),$$

$$G(y,\theta) = \left\{1 + \theta(\frac{dAi(y)}{dy})^2 - \theta y(Ai(y)^2\right\}^{-1},$$

где τ, θ — действительные числа, выступающие в качестве параметров решения. С использованием полученных соотношений аналог солитонного решения для уравнения (6) задается в виде:

$$\begin{aligned} &u(\xi,T) = (12T)^{-2/3}u_s((12T)^{-1/3}\xi - \tau(T), \theta(T)), \\ &\tau(T) = \tau_0 T^{-1/3}, \theta = \theta_0 T^{-1/3}, \end{aligned} \qquad (9)$$

где величины τ_0 и θ_0 определяются из начальных условий.

Отметим, что в полученном решении можно достаточно четко проследить фронт импульса, а сам импульс имеет резко выраженный максимум. При дальнейшем увеличении времени амплитуда решения падает, и фронт импульса сглаживается. Полученное решение имеет важное следствие: на больших временах становится возможным применить независимо от имеющихся начальных условий анализ при помощи линеаризации.

Изменение начальных данных приводит к существенному изменению формы импульса в районе его максимума: чем больше максимум, тем круче фронт.

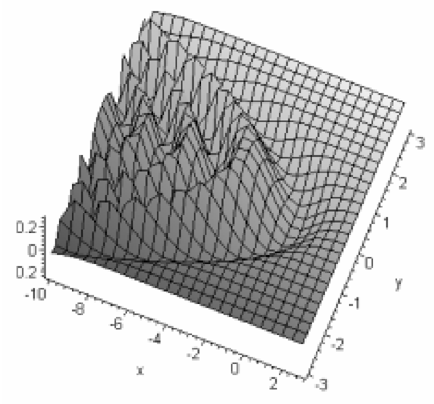
Полученные решения при помощи автомодельного соотношения

$$u(X,Y,T)=u(X+Y^2/4T,T)=u(\xi,T)$$

позволяют легко построить типичные пространственные зависимости нашего импульса в квазидвухмерном случае.

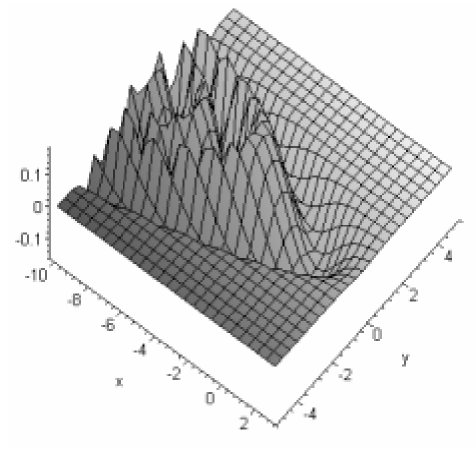
Обратим внимание, что в ходе распространения импульса происходит его эволюция в сторону выравнивания его фронта. Импульс в ходе распространения в среде приобретает все более и более плоский фронт.

Таким образом, учет пространственной неодномерности задачи приводит к нетривиальному характеру распространения ультракороткого лазерного импульса. Несомненно, что описанные в работе эффекты могут быть полезны как при интерпретации экспериментов по распространению импульсов в нелинейных средах, обладающих эффектом Штарка, так и в теоретических исследованиях по нелинейной спектроскопии конденсированных сред.



T=0,3

а



T=0,5

б

Рис. 1. Типичные пространственные зависимости ультракороткого оптического импульса, распространяющегося в среде с эффектом Штарка. Величины амплитуд и координат показаны в условных единицах

Выводы. 1. На основе микроскопического гамильтониана получено эффективное уравнение, описывающее распространение квазидвухмерного ультракороткого лазерного импульса в двухуровневой системе атомов с эффектом Штарка.

2. Проведена точная автомодельная редукция и получено асимптотическое описание распространяющегося импульса на больших временах. Полученное эффективное уравнение имеет вид цилиндрического уравнения Кортевега де Фриза.

3. Приведено точное аналитическое решение для уравнения, следующего из автомодельной редукции. Данное решение является безотражательным потенциалом для соответствующей спектральной задачи цилиндрического уравнения Кортевега де Фриза, имеющей вид уравнения Шредингера с опорным потенциалом, и может служить аналогом солитонного решения.

4. В ходе распространения импульса происходит его эволюция в сторону выравнивания его фронта. Импульс в ходе распространения в среде приобретает все более и более плоский фронт.

5. На больших временах, вследствие характера полученного аналога солитонного решения, становится возможным применить, независимо от имеющихся начальных условий, анализ при помощи линеаризации. Это ведет как к выводу о том, что асимтотика ультракороткого импульса при распространении в среде с эффектом Штарка определяется на больших временах только характером дисперсии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hacken G.* Synergetics. M. : Mir, 1980.

2. Optical resonance and two-level atoms / L. Allen, J. Eberly. M. : Mir. 1978. P. 222.

3. *Samartsev V.V.* Modern experimental investigations on resonance media using the method of light echo // Izv. SA USSR. Phys. 1982. V. 46. № 3. P. 524—537.

4. *Ahmanov S.A.* Methods of non–linear optics on spectroscopy of light dispersion / S.A. Ahmanov, N.I. Koroteev. M. : Nauka, 1981. P. 543,

5. Coherent spectroscopy of molecular crystals / V.V. Samartsev, Y.V. Naboikin, N.B. Silaeva, P.V. Ziniviev. Kiev : Nauk. Dumka, 1986. P. 204.

6. *Zaslavsky G.M.* Introduction into non–linear physics: from oscillator to vorticity and chaos / G.M. Zaslavsky, R.Z. Sagdeev. M., 1988. P. 368.

7. *Bulaff R.* Solitons / R. Bulaff, F. Kodry. M. : Mir, 1983. P. 408.

8. *Lam J.L.* Introduction into soliton theory. M. : Mir, 1983. P. 294.

9. *Ahmanov S.A.* Optics of phemto–second laser impulses / S.A. Ahmanov, V.A. Vislouh, A.S. Chirkin. M. : Nauka, 1988. P. 312.

10. *Zaharov V.E.* Hamiltonian formalism for waves in non–linear media with dispersion // Izv. VSA. Radiophysic. 1974. V. 17. № 4. P. 431—453.

11. Solitons and non–linear wave equations / R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris. N. Y. : Academic Press, 1983.

12. *Zaharov V.E.* Soliton theory. M. : Nauka, 1980. P. 342.

13. *Ablowitz M.* Solitons and the inverse scattering transform. Society for industrial and applied mathematics / *M. Ablowitz*, H. Segur // Philadelphia, 1981. P. 479.

14. *Belonenko M.B.* Electrostriction soliton as a cluster model in a high–temperature phase of a ferroelectric containing hydrogen / M.B. Belonenko, V.V. Kabakov // Phys. of solid state. 1998. V. 40. № 4. P. 713—715.

15. *Burtsev S.P.* Damping of soliton oscillations in media with negative dispersion rule // JETP. 1985. V. 88.

16. *Kapogero F.* Spectral transformations and solitons / F. Kapogero, A. Degasperis. M. : Mir, 1985. P. 472.

17. *Tahtajan L.A.* Hamiltonian approach in soliton theory / L.A. Tahtajan, L.D. Faddeev. M. : Nauka, 1986. P. 528.