

УДК 624.131

А. Н. Богомолов, А. Н. Ушаков, О. А. Богомолова, В. В. Подтелков, О. В. Ермаков**О НЕВОЗМОЖНОСТИ ОДНОСТОРОННЕГО ВЫПОРА ГРУНТА
ОДНОРОДНОГО ОСНОВАНИЯ ИЗ-ПОД ЛЕНТОЧНОГО
ЦЕНТРАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО ФУНДАМЕНТА**

На основании полученного авторами решения основной смешанной задачи плоской теории упругости исследуется вопрос о распределении напряжений в однородном и изотропном основании штампа, находящегося под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности, при различных значениях коэффициента трения по контакту «штамп — грунт». Показано, что при любых значениях коэффициента трения по контакту «штамп — грунт» поле напряжения под штампом симметрично относительно вертикальной оси, проходящей через его середину. Это предопределяет то, что при достижении величиной нагрузки предельно допустимого значения по несущей способности может произойти только симметричный двусторонний выпор грунта из-под основания, что согласуется с расчетными схемами Л. Прандтля и Р. Хилла, используемыми в геомеханике. Рассмотрено соответствие классических решений задачи о штампе полученным результатам и упомянутым расчетным схемам.

Ключевые слова: расчетные схемы Л. Прандтля и Р. Хилла, основная смешанная задача теории упругости для полуплоскости, напряженное состояние основания, коэффициент трения по контакту, двусторонний выпор грунта.

On the basis of the received by the author's solution of the main mixed problem of the flat theory of elasticity the issue of distribution of tension in homogeneous and isotropic stamping sheet located under the impact of vertical evenly distributed load of constant rate at various friction coefficient values on the "tool – soil". It is shown that at any friction coefficient values on "tool — soil" contact stress field under the tool is symmetrical towards vertical axis passing through its middle. It predetermines the fact that when reaching value load of limit values of the bearing capacity only symmetrical bilateral bottom heave from below the foundation can occur and it corresponds to design models by L. Prandtl and R. Hill used in geomechanics. The authors consider the compliance of classical solutions of problems of tool with the obtained results and the mentioned design models.

Key words: design models by L. Prandtl and R. Hill, main mixed problem of the elasticity theory for half-planes, stress state of the foundation, friction coefficient on contact, bilateral bottom heave.

Хорошо известно [1], что при вертикальной нагрузке на штамп, возрастающей ступенями, выделяют три фазы напряженного состояния грунтов под штампом, последней из которых является фаза выпирания, либо сопровождающаяся разрушением сооружения, либо делающая невозможной его дальнейшую эксплуатацию.

При определении несущей способности оснований фундаментов, нагруженных центрально приложенной вертикальной нагрузкой, в качестве классических рассматриваются решения и расчетные схемы, предложенные Л. Прандтлем [2] и Р. Хиллом [3] (рис. 1).

Обе расчетные схемы ввиду симметричности нагрузки и невесомости, однородности и изотропности основания обеспечивают симметрию напряженного состояния относительно вертикальной оси Z и, как следствие, — возникновение двустороннего симметричного выпора грунта.

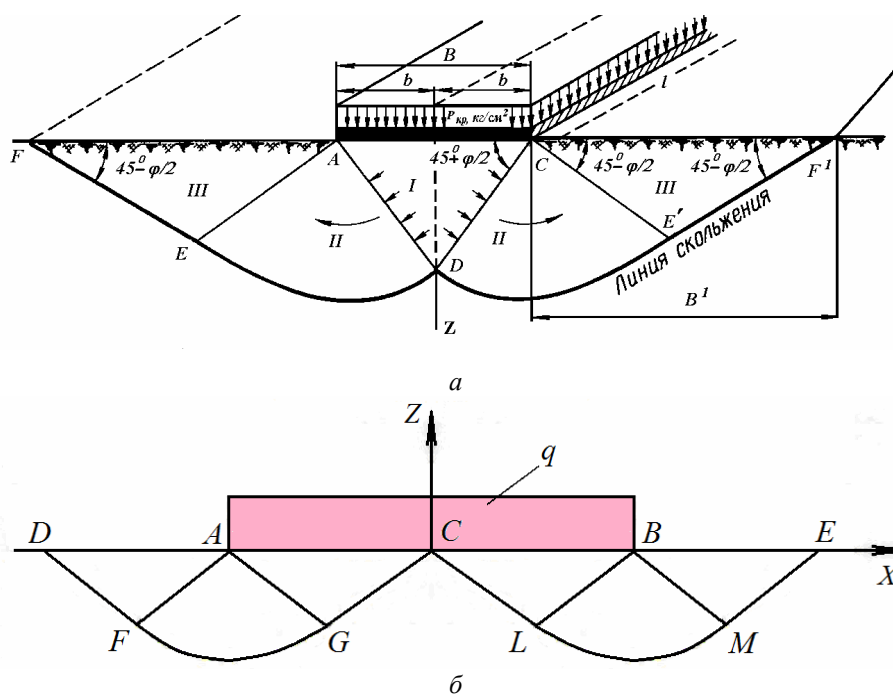


Рис. 1. Расчетные схемы Л. Прандтля (а) и Р. Хилла (б)

Однако на практике дело обстоит иначе: практически при всех реально произошедших авариях инженерных сооружений, связанных с выпором грунта основания из-под фундамента, выпор грунта всегда был односторонним. На рис. 2 приведены фотографии объектов, где наблюдалось это явление.

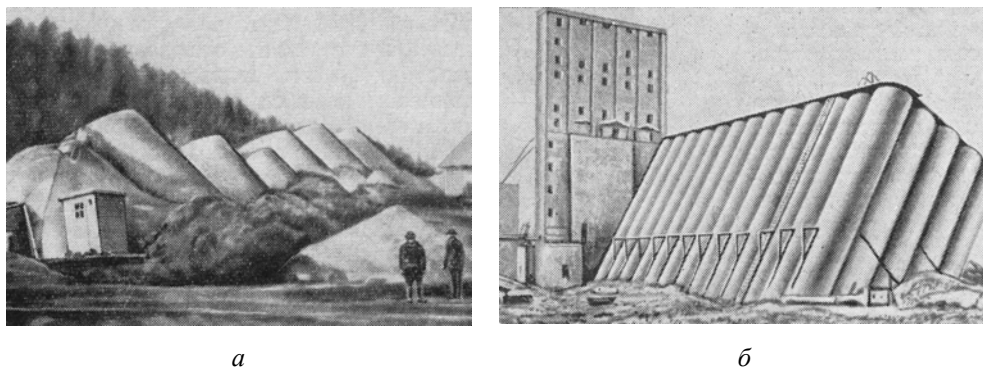


Рис. 2. Катастрофическое разрушение силоса (США, 1940 г., фото [4]) (а); авария Трансконского элеватора (г. Виннипег, Канада, 1913 г., фото [5]) (б)

В связи с этим в [6] рассмотрены задачи об определении поля напряжений в грунтовом массиве при действии вертикальной нагрузки постоянной интенсивности, приложенной к абсолютно жесткому штампу, имитирующему фундамент сооружения, в предположении, что коэффициент трения k по контакту «штамп — грунт» — постоянная величина (задача А), и в случае, когда эта величина имеет бесконечно большое значение (задача Б).

В результате решения задачи А установлено, что картины изолиний всех трех компонент напряжения (в том числе и контактного давления), характеризующие напряженное состояние основания, асимметричны относительно вертикальной оси, проходящей через середину штампа. На основании этого было сделано предположение о возможности одностороннего выпора грунта из-под штампа, находящегося под действием нормальной постоянной нагрузки, когда его основание однородно и изотропно.

Такое же предположение можно сделать и при анализе результата решения задачи о давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии трения, полученного Н. И. Мухелишвили [7] методом сопряжения и Ю. К. Зарецким [8] при помощи интегрального преобразования Гильберта, поскольку эпюры нормальных контактных давлений в обоих случаях также асимметричны (рис. 3). Таким образом, можно было бы заключить, что упомянутые выше решения [6—8] находятся в противоречии с классическими решениями Л. Прандтля и Р. Хилла. Ниже будет показано, что это не так.

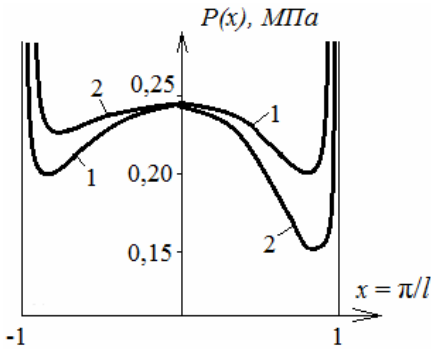


Рис. 3. Эпюры контактных давлений: 1 — бесконечно большое трение; 2 — конечное значение трения (цит. по [8])

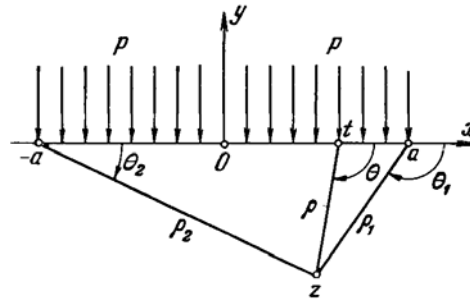


Рис. 4. Расчетная схема задачи (цит. по [5])

Целью данной работы является теоретическое обоснование обязательности двустороннего выпора грунта при любых значениях величины коэффициента трения по контакту «штамп — грунт».

Аналогично тому, как это сделано нами в работе [6], приведем постановку и результаты решения задач, сравнив их с результатами, полученными Н. И. Мухелишвили [7] методом сопряжения.

Рассмотрим абсолютно жесткий штамп с прямолинейным горизонтальным основанием, параллельным оси Ox , предполагая, что штамп может перемещаться лишь вертикально. Пусть на границе «штамп — грунт» коэффициент трения принимает значение k . Будем считать, что внешние силы, действующие на штамп, имеют равнодействующую, направленную вертикально вниз, так что

$$X = 0, \quad Y = -P, \quad (1)$$

где P — заданная положительная величина.

Пусть отрезок L границы полуплоскости, соприкасающийся со штампом, расположен симметрично относительно начала координат и имеет длину $2a$,

так что для точек t отрезка L имеем: $-a \leq t \leq a$. Определим напряженное состояние в точках полуплоскости.

Известно [7], что в случае плоской задачи теории упругости компоненты напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2\{\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\} = 4\operatorname{Re}\Phi(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2\{(\bar{z} - z)\Phi'(z) - \Phi(z) - \overline{\Phi(z)}\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача А. Случай конечного коэффициента трения k .

В этом случае функция напряжения [7, с. 433] имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{P(1+ik)e^{i\pi\alpha}}{2\pi(a+z)^{\frac{1}{2}+\alpha}(a-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}, \quad (3)$$

где k — коэффициент трения, а α — некоторый постоянный параметр, связанный с коэффициентом трения k условием

$$\operatorname{tg}\pi\alpha = k \frac{\aleph - 1}{\aleph + 1}, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \quad (4)$$

причем \aleph — упругая постоянная, которая выражается через коэффициент Пуассона ν по формуле $\aleph = 3 - 4\nu$, а последний связан с коэффициентом бокового давления соотношением $\xi_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$. Параметр α принимает нулевое значение ($\alpha = 0$) при отсутствии трения ($k = 0$), и при $\alpha \rightarrow 1/2$ коэффициент трения принимает бесконечно большое значение ($k \rightarrow \infty$).

По формулам (2) и (3) получим компоненты напряжения в виде

$$\sigma_x = -\frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha (l_2 + kl_1) - \frac{P}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} (\sin r + 2k \cos r), \quad (5)$$

$$\sigma_y = \frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha (l_2 + kl_1) - \frac{P}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \sin r, \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha (l_1 - kl_2) + \frac{P}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} k \sin r, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(a-x)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}, \\ \theta_1 &= \pi - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}, \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$r = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \alpha(\theta_2 - \theta_1), \quad s = \frac{\theta_1 + 3\theta_2}{2} + \alpha(\theta_2 - \theta_1), \quad t = \frac{3\theta_1 + \theta_2}{2} + \alpha(\theta_2 - \theta_1),$$

$$h_1 = -\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \frac{1}{\rho_2 \sqrt{\rho_1 \rho_2}}, \quad h_2 = \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) \frac{1}{\rho_1 \sqrt{\rho_1 \rho_2}},$$

$$l_1 = -(h_1 \sin s + h_2 \sin t), \quad l_2 = h_1 \cos s + h_2 \cos t.$$

На рис. 5 приведены изолинии вертикальных, горизонтальных и касательных напряжений, построенные на основании формул (5)—(7) при конкретных значениях расчетных параметров. Коэффициент трения бетона по грунту, согласно [9], принят равным $k = 0,25$.

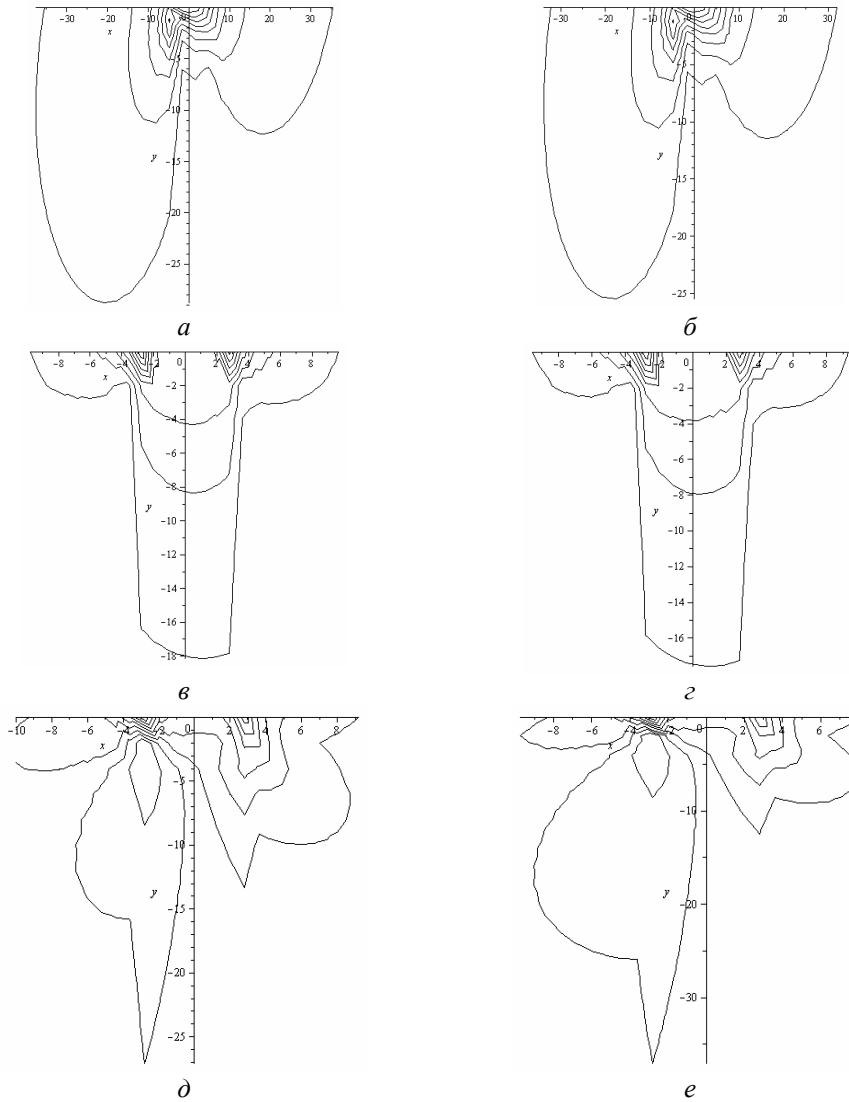


Рис. 5. Картины изолиний горизонтального σ_x (а—б), вертикального σ_y (в—г) и касательного τ_{xy} (д—е) напряжений в основании штампа при $a = 3$, $\alpha = 0,01$, $P_0 = 1$, $\nu = 0,42$ для глинистого грунта (левый столбец) и при $a = 3$, $\alpha = 0,022$, $P_0 = 1$, $\nu = 0,3$ для песчаного грунта (правый столбец) при $k = 0,25$

Как видно из рис. 5, картины изолиний всех трех компонент напряжения асимметричны относительно вертикальной оси, что и побудило авторов сделать предположение о возможности одностороннего выпора грунта из-под штампа.

Полагая в (6) $y=0$, $x=t$, $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$, $\rho_1 = |a-t|$, $\rho_2 = |a+t|$, получим формулы, точно совпадающие с формулами, полученными Н. И. Мухелишвили [7, с. 427, 433] для давления под штампом на участке $-a \leq t \leq a$:

при наличии трения:

$$P(t) = \frac{P}{\pi} \left(\frac{a-t}{a+t} \right)^\alpha \frac{\cos \pi \alpha}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{P \cos \pi \alpha}{\pi (a-t)^{\frac{1-\alpha}{2}} (a+t)^{\frac{1+\alpha}{2}}}, \quad (9)$$

при его отсутствии:

$$P(t) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (10)$$

Задача Б. Случай бесконечно большого коэффициента трения.

Функция напряжения для рассматриваемого случая [7, с. 416] имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{iP}{2\pi} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \quad (11)$$

где

$$\beta = \frac{\ln \aleph}{2\pi}. \quad (12)$$

С учетом (11) по формулам (2) получаем

$$\sigma_x = \frac{P_0}{2\pi} \frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{3P_0}{2\pi} \frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{yP_0}{\pi} \frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left(\frac{\gamma_1\rho_1 + \gamma_2\rho_2}{\rho_1\rho_2}\right), \quad (13)$$

$$\sigma_y = -\frac{P_0}{2\pi} \frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{P_0}{2\pi} \frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \frac{yP_0}{\pi} \frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left(\frac{\gamma_1\rho_1 + \gamma_2\rho_2}{\rho_1\rho_2}\right), \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P_0}{2\pi} \frac{e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{P_0}{2\pi} \frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{yP_0}{\pi} \frac{e^{\beta(\theta_2-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left(\frac{\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2}{\rho_1\rho_2}\right), \quad (15)$$

где

$$\delta_1 = -\beta \cos\left(\frac{\theta_1+3\theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta_1+3\theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

$$\delta_2 = \beta \cos\left(\frac{3\theta_1 + \theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\theta_1 + \theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

$$\gamma_1 = -\beta \sin\left(\frac{\theta_1 + 3\theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta_1 + 3\theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

$$\gamma_2 = \beta \sin\left(\frac{3\theta_1 + \theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\theta_1 + \theta_2}{2} + \beta \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

а выражения для ρ_1 , ρ_2 , θ_1 , θ_2 определяются соотношениями (8).

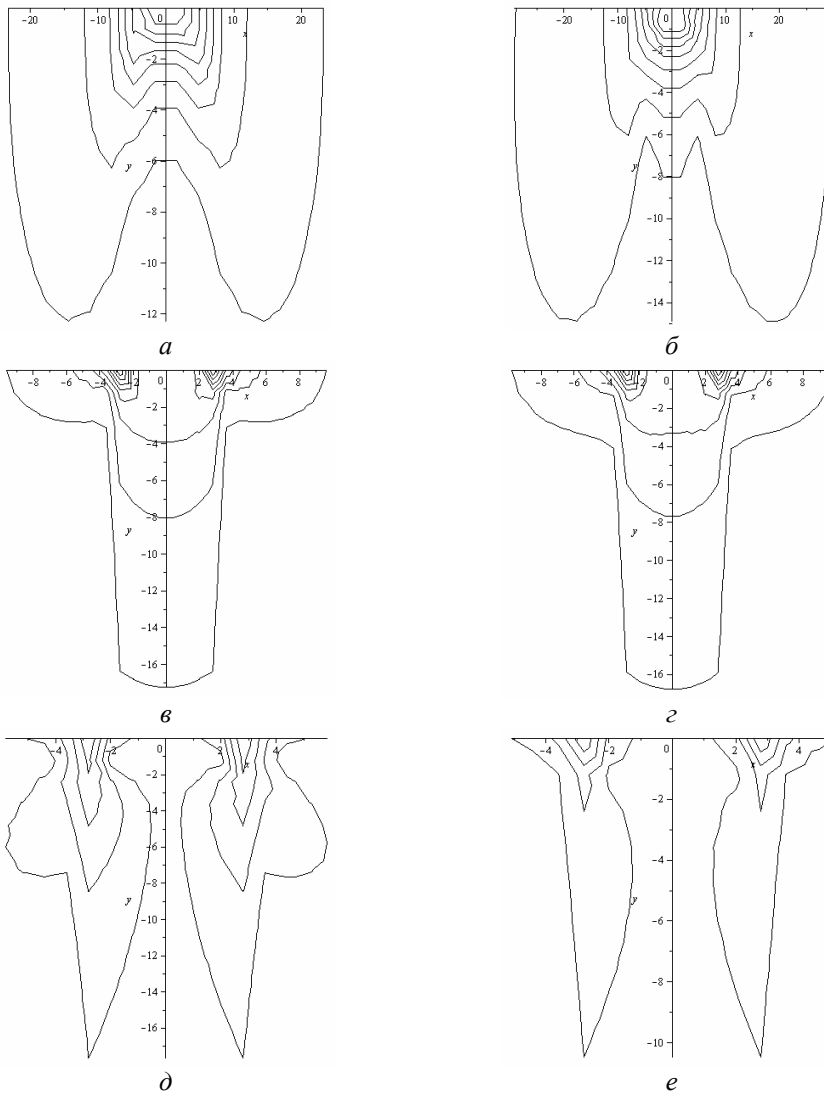


Рис. 6. Картины изолиний горизонтального σ_x (а—б), вертикального σ_y (б—з) и касательного τ_{xy} (д—е) напряжений в основании штампа при $a = 3$, $\beta = 0,01$, $P_0 = 1$, $\nu = 0,42$ для глинистого грунта (левый столбец) и при $a = 3$, $\beta = 0,022$, $P_0 = 1$, $\nu = 0,3$ для песчаного грунта (правый столбец) при $k = 0,25$

На рис. 5 приведены изолинии вертикальных, горизонтальных и касательных напряжений, построенные на основании формул (13)—(15) при конкретных значениях расчетных параметров.

Заметим, что все изолинии симметричны относительно оси ординат, что предопределяет двусторонний выпор и согласуется с расчетными схемами Л. Прандтля и Р. Хилла.

Полагая в (14) $y = 0$, $x = t$, $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$, $\rho_1 = |a - t|$, $\rho_2 = |a + t|$, с учетом соотношения (12) получим формулу для давления, действующего на границу полуплоскости, на участке $-a \leq t \leq a$, т. е.

$$P(t) = \frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{\aleph + 1}{\sqrt{\aleph}} \cos\left(\frac{\ln \aleph}{2\pi} \ln \frac{a+t}{a-t}\right), \quad (16)$$

а также для касательного напряжения из формулы (15) имеем

$$T(t) = \frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{\aleph + 1}{\sqrt{\aleph}} \sin\left(\frac{\ln \aleph}{2\pi} \ln \frac{a+t}{a-t}\right). \quad (17)$$

Формулы, точно совпадающие с формулами (16) и (17), получены Н. И. Мусхелишвили [7, с. 417] методом сопряжения и В. М. Абрамовым [10] методом интегральных преобразований и дают решение классической задачи о штампе с прямолинейным горизонтальным основанием в случае бесконечно большого коэффициента трения.

При действии на штамп вертикальной нагрузки под штампом возникают перемещения, имеющие разные знаки от оси ординат. Покажем это.

Как известно из теории упругости, при сжатии упругих тел возникают два типа перемещений: поступательное и упругое [11, с. 93—94].

Будем предполагать, что в области контакта между нормальными и касательными напряжениями имеет место соотношение

$$\tau_{xy} = k\sigma_y.$$

Таким образом, в точке контакта с абсциссой x при наличии вертикальной нагрузки $P(x)$ также будет действовать касательное усилие $T(x) = kP(x)$. Из-за наличия касательных усилий граничные точки сжимаемых тел с абсциссой x совершат упругие перемещения в направлении оси Oy [9, с. 138]. Эти перемещения — суть сдвиги вдоль оси Ox .

Рассмотрим перемещение (сдвиг) величины β на участке $-a \leq t \leq a$ оси Ox . Поле напряжений от этого перемещения представляет собой результат решения второй основной граничной задачи плоской теории упругости, полученного авторами в [12].

Компоненты напряжения имеют вид

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{4\mu\alpha\beta xy(3 + \aleph)}{\pi \aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2)} + \frac{8\mu\alpha\beta xy}{\pi \aleph} \left(\frac{4y^2(x^2 - y^2 - a^2) + ((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2 y^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2)^2} \right), \\ \sigma_y = \frac{4\mu\alpha\beta xy(1 - \aleph)}{\pi \aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2)} - \frac{8\mu\alpha\beta xy}{\pi \aleph} \left(\frac{4y^2(x^2 - y^2 - a^2) + ((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2 y^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2)^2} \right), \\ \tau_{xy} = \frac{4\mu\alpha\beta}{\pi \aleph} \left(\frac{8x^2 y^2((x^2 - y^2 - a^2) - 2y^2((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2 y^2))}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2)^2} \right) - \frac{2\mu\alpha\beta(\aleph + 1)(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi \aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2)}. \end{cases} \quad (18)$$

Заметим, что нормальные компоненты напряжения в нижней полуплоскости (при $y < 0$) принимают положительные значения в правой полуплоскости (при $x > 0$), отрицательные в левой полуплоскости (при $x < 0$) и равные нулю на оси Oy (при $x = 0$), а касательная компонента, являясь четной функцией, принимает значения одного знака как в правой, так и в левой полуплоскости, причем на оси Oy $\tau_{xy} = \frac{2\mu\alpha\beta(\aleph+1)}{\pi\aleph(a^2+y^2)}$.

Для определения компонент вертикальной деформации воспользуемся известными формулами [5, с. 95]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2\mu}(\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\mu}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\tau_{xy},\end{aligned}\tag{19}$$

где $\mu = E/(2(1+\nu))$ — модуль сдвига, который выражается через E — модуль деформации (модуль Юнга) и ν — коэффициент Пуассона. Тогда по формулам (19) с учетом формул (18) получим

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{4a\beta xy}{\pi((x^2+y^2-a^2)+4a^2y^2)} + \frac{4a\beta xy(4y^2(x^2-y^2-a^2)+((x^2-y^2-a^2)-4x^2y^2))}{\pi\aleph((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2)^2}, \\ \varepsilon_y = -\frac{4a\beta xy}{\pi\aleph((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2)} - \frac{4a\beta xy(4y^2(x^2-y^2-a^2)+((x^2-y^2-a^2)-4x^2y^2))}{\pi\aleph((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2)^2}, \\ \gamma_{xy} = \frac{2a\beta}{\pi\aleph} \left(\frac{8x^2y^2(x^2-y^2-a^2)-2y^2((x^2-y^2-a^2)^2-4x^2y^2)}{((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2)^2} \right) - \frac{a\beta(\aleph+1)(x^2-y^2-a^2)}{\pi\aleph((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2)}. \end{cases}\tag{20}$$

Нетрудно видеть, что компоненты деформации (20), как и компоненты напряжения (18), обладают симметрией, так что

$$\varepsilon_x(x, y) = -\varepsilon_x(-x, y), \quad \varepsilon_y(x, y) = -\varepsilon_y(-x, y), \quad \gamma_{xy}(x, y) = \gamma_{xy}(-x, y).$$

Как известно, перемещения происходят вследствие деформации. Поэтому горизонтальные перемещения по разные стороны от оси Oy принимают значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку, а на оси Oy эти перемещения равны нулю. Поскольку сила трения направлена в сторону, противоположную горизонтальному перемещению штампа, то при рассмотрении точек с отрицательными абсциссами необходимо изменить знак коэффициента трения на противоположный. Покажем, что с учетом данного замечания при конечном значении величины коэффициента трения k картины изолиний компонент напряжения (5—7) будут симметричными относительно оси Oy .

Нетрудно видеть, что они обладают симметрией относительно α и x , так что

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(-\alpha, -x, y) &= \sigma_x(\alpha, x, y), \\
 \sigma_y(-\alpha, -x, y) &= \sigma_y(\alpha, x, y), \\
 \tau_{xy}(-\alpha, -x, y) &= -\tau_{xy}(\alpha, x, y).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Установим, например, соотношение для компоненты вертикального напряжения σ_y .

Обозначим $f(-\alpha, -x, y) = \bar{f}$.

Ясно, что

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\rho_1(-x, y)}{\rho_2(-x, y)} \right)^{-\alpha} = \left(\frac{\rho_1(x, y)}{\rho_2(x, y)} \right)^{\alpha} = \rho, \rho_1(-x, y)\rho_2(-x, y) = \rho_1(x, y)\rho_2(x, y). \tag{22}$$

Покажем, что $\sin \bar{r} = \sin r$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
 \sin \bar{r} &= \sin \left(\frac{\pi - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}}{2} - \alpha \left(\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \pi \right) \right) = \\
 &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}}{2} + \alpha \left(\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \pi \right) \right] \right) = \\
 &= \cos \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}}{2} + \alpha \left(\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \pi \right) \right) = \\
 &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}}{2} + \alpha \left(\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \pi \right) \right) = \\
 &= \sin r.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Аналогично можно показать, что

$$\cos \bar{r} = -\cos r, \sin \bar{s} = -\sin t, \sin \bar{t} = -\sin s, \cos \bar{s} = \cos t, \cos \bar{t} = \cos s. \tag{24}$$

Тогда с учетом соотношений (22)—(24) получаем

$$\bar{l}_1 = -l_1, \bar{l}_2 = l_2. \tag{25}$$

Применяя соотношения (6), (22)—(25), для компоненты вертикального напряжения имеем

$$\begin{aligned}
 \overline{\sigma}_y &= \sigma_y(-\alpha, -x, y) = \\
 &= \frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1(-x, y)}{\rho_2(-x, y)} \right)^{-\alpha} (\overline{l}_2 - k\overline{l}_1) - \frac{P}{\pi} \left(\frac{\rho_1(-x, y)}{\rho_2(-x, y)} \right)^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{\rho_1(-x, y)\rho_2(-x, y)}} \sin \overline{r} = \\
 &= \frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1(x, y)}{\rho_2(x, y)} \right)^{\alpha} (l_2 + kl_1) - \frac{P}{\pi} \left(\frac{\rho_1(x, y)}{\rho_2(x, y)} \right)^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\rho_1(x, y)\rho_2(x, y)}} \sin r = \\
 &= \sigma_y(\alpha, x, y) = \sigma_y.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом проверяются и оставшиеся два соотношения из (21).

Таким образом, при конечном значении величины коэффициента трения картины изолиний всех трех компонент напряжения в однородном и изотропном основании симметричны относительно вертикальной оси, что предопределяет двусторонний выпор и вполне согласуется с расчетными схемами Л. Прандтля и Р. Хилла. Очевидно, что формулы давления под штампом (9) при рассматриваемой замене будут также симметричны относительно оси ординат.

Проверим, соответствуют ли классические решения (9), (10), (16) задачи о штампе для различных значений коэффициента трения расчетным схемам Л. Прандтля и Р. Хилла.

Для этого обозначим $P_+(t)$ и $P_-(t)$ — давление под штампом в точках t отрезка $-a \leq t \leq a$, симметричных относительно начала координат.

Если во всех точках отрезка, нагруженного вертикальной нагрузкой интенсивности P , выполняется условие

$$\frac{P_+(t)}{P_-(t)} = 1, \tag{26}$$

то при определенной величине интенсивности внешней нагрузки предопределено возникновение двустороннего выпора грунта.

Заметим, что выполнение условия (26) соответствует расчетным схемам Л. Прандтля и Р. Хилла.

Проверим выполнение этого соответствия для приведенных выше случаев с различными коэффициентами трения.

В случае конечного коэффициента трения, используя (9), имеем

$$\frac{P_+(t)}{P_-(t)} = \left(\frac{a-t}{a+t} \right)^{2\alpha}, \tag{27}$$

где α — параметр, определяемый из соотношения (4).

Нетрудно видеть, что соотношение (26) имеет место при $\alpha = 0$ или, по формуле (4), при $k = 0$ для любой точки отрезка $-a \leq t \leq a$. В этом случае для давления $P(t)$, согласно (9) или (10), будем иметь

$$P_-(t) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - t^2}} = P_+(t).$$

Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Заметим, что при $a \rightarrow \infty$ отношение (27) стремится к единице, т. е. при увеличении длины участка, нагруженного нормальной силой, значения контактных давлений в точках, симметричных относительно начала координат, в пределе принимают значения, равные единице независимо от значений α . Если зафиксировать значение a , то при увеличении значений t в пределах данного интервала и при $\alpha \rightarrow 1/2$ значения функции (27) убывают от единицы до нуля, причем в крайних точках интервала $0 \leq t \leq a$ они равны единице и нулю соответственно, независимо от значений параметра α . Ниже приведена таблица значений функции (27) при различных значениях t и α на интервале $0 \leq t \leq 10$.

Таблица 1

α	t						
	0	1	3	5	7	9	10
0,1	1,000	1,000	0,884	0,803	0,707	0,555	0,000
0,2	1,000	0,923	0,781	0,644	0,500	0,308	0,000
0,3	1,000	0,887	0,690	0,517	0,353	0,171	0,000
0,4	1,000	0,852	0,609	0,415	0,250	0,095	0,000
0,45	1,000	0,835	0,573	0,372	0,210	0,071	0,000

Заметим, что в табл. 1 приведены результаты вычислений отношения (26) при значениях α , определенных в интервале $0 \leq \alpha < 1/2$, которые априори не всегда соответствуют какому-либо типу грунта. Поэтому желательно привести примеры вычислений отношения (26) для реальных типов грунтов.

Согласно [9], положим коэффициент трения бетона о грунт $k = 0,25$, а значения коэффициента Пуассона примем $\nu = 0,3$ для песчаного грунта и $\nu = 0,42$ для глинистого грунта. Тогда по формуле (4) имеем, соответственно, $\alpha = 0,023$ и $\alpha = 0,011$. Распределения значений функции (27) для этих двух типов грунтов при $a = 10$ на интервале $0,5 \leq t \leq 9,5$ представлены в табл. 2.

Таблица 2

α	t						
	0,5	1	3	5	7	9	9,5
0,011	1	1	0,986	0,976	0,963	0,937	0,923
0,023	1	1	0,972	0,951	0,923	0,873	0,845

Можно также провести вычисления отношения (26) в различных точках нижней полуплоскости для разных типов грунтов. Для компоненты вертикального напряжения σ_y результат этого эксперимента при $a = 10$ представлен в табл. 3.

Таблица 3

y	x					
	$\alpha = 0,023$ (песчаный грунт)			$\alpha = 0,011$ (глинистый грунт)		
	1	5	9	1	5	9
1	1	1	1	1	1	1
10	0,98	0,85	0,64	0,98	0,84	0,62
25	0,84	0,48	0,40	0,83	0,46	0,38

Проведенный эксперимент показывает, что вблизи границы полуплоскости отношение (26) мало отличается от единицы и, как и в предельном случае, уменьшается по мере приближения к граничной точке $t = a$ нагруженного участка, а также по мере удаления от границы полуплоскости.

Прямые вычисления показывают, что по мере увеличения длины участка нагружения величина отношения (26) увеличивается, приближаясь к единице.

Теперь рассмотрим случай бесконечно большого коэффициента трения. Используя (16), имеем

$$\begin{aligned} P_-(t) &= \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - (-t)^2}} \frac{\aleph + 1}{\sqrt{\aleph}} \cos \left[\frac{\ln \aleph}{2\pi} \ln \left(\frac{a-t}{a+t} \right) \right] = \\ &= \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{\aleph + 1}{\aleph} \cos \left[\frac{\ln \aleph}{2\pi} \ln \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{-1} \right] = \\ &= \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{\aleph + 1}{\aleph} \cos \left[\frac{\ln \aleph}{2\pi} \ln \left(\frac{a+t}{a-t} \right) \right] = P_+(t), \end{aligned}$$

и тогда (26) выполняется во всех точках отрезка $-a \leq t \leq a$.

Таким образом, результаты проведенного анализа позволяют утверждать, что при любых рассмотренных в работе численных значениях коэффициента трения по контакту «штамп — грунт» картины изолиний полей всех трех компонент напряжения в грунтовом массиве под штампом, а также эпюра контактного давления будут симметричны относительно вертикальной оси, проходящей через середину штампа. Данное утверждение предопределяет то, что при достижении величиной нагрузки предельно допустимого значения по несущей способности может произойти только симметричный двусторонний выпор грунта из-под основания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Герсеванов Н. М. Опыт применения теории упругости к определению допускаемых нагрузок на грунт на основе экспериментальных работ // Труды МИИТ. М.: Транспечать НКПС, 1930. Вып. XV. С. 255—284.
2. Prandtl L. Uber die Harte plastischer Korher // Gotinger Nachr. Math. phys. 1920. K. 1. S. 74—85.
3. Hill R. The plastic yielding of notched bars under tersion // Q. J. Mech. Appl. Math. 1949. № 2. P. 40—52.
4. Чеботарев Г. П. Механика грунтов, основания и земляные сооружения. М.: Стройиздат, 1968. 616 с.
5. Маслов Н. Н. Основы механики грунтов и инженерной геологии. М.: Высшая школа, 1968. 629 с.
6. Богомолов А. Н., Ушаков А. Н., Богомолова О. А. Об одностороннем выпоре грунта одnorodного основания из-под центрально нагруженного фундамента // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 1(22). С. 85—90.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. Зарецкий Ю. К. Об обобщении метода П. И. Клубина решения плоской контактной задачи // ОФМГ. 1974. № 2. С. 25—26.
9. Справочник проектировщика. Основания, фундаменты и подземные сооружения / М. И. Горбунов-Посадов, В. А. Ильичев, В. И. Крутов и др.; под общ. ред. Е. А. Сорочана и Ю. Г. Трофименкова. М.: Стройиздат, 1985. 480 с.

10. *Абрамов В. М.* Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения // ДАН СССР. 1937. Т. 17. № 4. С. 173—178.
11. *Штаерман И. Я.* Контактные задачи теории упругости. М. — Л. : ГИТТЛ, 1949. 270 с.
12. *Богомолов А. Н., Ушаков А. Н., Богомолова О. А.* Напряженно-деформированное состояние полуплоскости при сдвиге участка ее границы // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Стр-во и архит. 2011. Вып. 21(40). С. 19—27.
1. *Gersevanov N. M.* Opyt primeneniya teorii uprugosti k opredeleniyu dopuskaemykh nagruzok na grunt na osnove eksperimental'nykh rabot // Trudy MIIT. M.: Transpechat' NKPS, 1930. Vyp. XV. S. 255—284.
2. *Prandtl L.* Uber die Harte plastischer Korher // Gotinger Nachr. Math. phys. 1920. K. 1. S. 74—85.
3. *Hill R.* The plastic yielding of notched bars under tension // Q. J. Mech. Appl. Math. 1949. № 2. P. 40—52.
4. *Chebotarev G. P.* Mekhanika gruntov, osnovaniya i zemlyanye sooruzheniya. M. : Stroizdat, 1968. 616 s.
5. *Maslov N. N.* Osnovy mekhaniki gruntov i inzhenernoi geologii. M. : Vysshaya shkola, 1968. 629 s.
6. *Bogomolov A. N., Ushakov A. N., Bogomolova O. A.* Ob odностороннем выпоре грунта однородного основания из под центральной нагруженного фундамента // Vestnik grazhdanskikh inzhenerov. 2010. № 1(22). S. 85—90.
7. *Muskhelishvili N. I.* Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. M. : Nauka, 1966. 707 s.
8. *Zaretskii Yu. K.* Ob obobshchenii metoda P. I. Klubina resheniya ploskoi kontaktnoi zadachi // OFMG. 1974. № 2. S. 25—26.
9. Spravochnik proektirovshchika. Osnovaniya, fundamente i podzemnye sooruzheniya / M. I. Gorbunov-Posadov, V. A. Il'ichev, V. I. Krutov i dr.; pod obshch. red. E. A. Sorochana i Yu. G. Trofimenkova. M. : Stroizdat, 1985. 480 s.
10. *Abramov V. M.* Problema kontakta uprugoi poluploskosti s absolyutno zhestkim fundamentom pri uchete sil treniya // DAN SSSR. 1937. Т. 17. № 4. S. 173—178.
11. *Shtaerman I. Ya.* Kontaktnye zadachi teorii uprugosti. M. — L. : GITTL, 1949. 270 s.
12. *Bogomolov A. N., Ushakov A. N., Bogomolova O. A.* Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie poluploskosti pri sdvige uchastka ee granitsy // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Ser.: Str-vo i arkhit. 2011. Vyp. 21(40). S. 19—27.

© *Богомолов А. Н., Ушаков А. Н., Богомолова О. А., Подтелков В. В., Ермаков О. В., 2015*

*Поступила в редакцию
в сентябре 2015 г.*

Ссылка для цитирования:

О невозможности одностороннего выпора грунта однородного основания из-под ленточного центрально нагруженного фундамента / А. Н. Богомолов, А. Н. Ушаков, О. А. Богомолова, В. В. Подтелков, О. В. Ермаков // Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2015. Вып. 3(39). Ст. 2. Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>

For citation:

Bogomolov A. N., Ushakov A. N., Bogomolova O. A., Podtelkov V. V., Ermakov O. V. [About the impossibility of unilateral bottom heave of homogeneous basis from below strip centrally loaded foundation]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2015, no. 3(39), paper 2. (In Russ.). Available at: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>