

УДК 539.3 + 624.072.1

П. А. Гелюх, Р. Н. Степанов**КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ. ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ**

Ставится общая задача колебания предварительно напряженных стержней, рассматриваемая в трехмерной постановке. Предварительно напряженное состояние предполагается однородным. В результате для изотропного предварительно напряженного материала стержня получены уравнения движения.

Ключевые слова: колебания стержней, предварительное напряжение, динамика стержней.

The article is devoted to the formulation of the general problem of fluctuations of prestressed rods. The problem is considered in the three-dimensional setting. Prestressed state is assumed to be homogeneous. As a result equations of motion were received for an isotropic prestressed material.

Key words: fluctuations of rods, prestressed state, dynamics of rods.

В современных строительных конструкциях в качестве элементов часто используются предварительно напряженные стержни, поэтому расчет таких стержней является актуальной задачей.

Рассмотрим постановку общей задачи колебания предварительно напряженного стержня постоянного радиуса.

Уравнения движения материала стержня в напряжениях, как известно, имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Зависимости напряжений от деформаций определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A_{11}(\varepsilon_{rr}) + A_{12}(\varepsilon_{\theta\theta}) + A_{13}(\varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_{12}(\varepsilon_{rr}) + A_{11}(\varepsilon_{\theta\theta}) + A_{13}(\varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= A_{13}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + A_{33}(\varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{\theta z} &= A_{44}(\varepsilon_{\theta z}), \\ \sigma_{zr} &= A_{44}(\varepsilon_{zr}), \\ \sigma_{\theta r} &= A_{66}(\varepsilon_{\theta r}). \end{aligned} \quad (2)$$

Нелинейные зависимости деформаций ε_{ij} от перемещений u_r, u_θ, u_z в цилиндрических координатах r, θ, z имеют вид [2]

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right]; \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{2r^2} \right) \left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \right)^2 + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right]; \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right]; \\
 \varepsilon_{r\theta} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - u_r \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]; \\
 \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - u_r \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]; \\
 \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right].
 \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим предварительно напряженный круглый стержень постоянно-го радиуса. Предварительно напряженное состояние однородно. Начальные перемещения зададим так:

$$\begin{aligned}
 u_r^{(0)} &= a_0 r, \\
 u_\theta^{(0)} &= b_1 \theta, \\
 u_z^{(0)} &= c_2 z,
 \end{aligned}$$

где a_0 , b_1 , c_2 — постоянны, при этом: a_0 — деформация начального радиального сжатия (расширения); b_1 — деформация начального кругового смещения; c_2 — определяет начальное растяжение (сжатие) вдоль оси z стержня.

Параметр a_0 не независим, а является функцией от b_1 и c_2 . Для определения зависимости $a_0(b_1, c_2)$ рассмотрим статическую задачу для стержня, когда внешние усилия отсутствуют. Принимая напряжения на поверхности стержня равными нулю, получаем зависимость

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -1 + \sqrt{1 - b_1^2 - \frac{A_{13}^{(0)}}{A_{11}^{(0)} + A_{12}^{(0)}} (2c_2 + c_2^2)}; \\
 A_{ij}^{(0)} &= a_{ij} \left[1 - \int_{-\infty}^0 f_{ij}(t) dt \right].
 \end{aligned}$$

Обозначим ε'_{ij} , u'_r , u'_θ , u'_z малые возмущенные деформации и перемещения. Полные перемещения являются суммой конечных, начальных перемещений и малых возмущенных перемещений:

$$\begin{aligned}
 u_r &= u_r^{(0)} + u'_r, \\
 u_\theta &= u_\theta^{(0)} + u'_\theta, \\
 u_z &= u_z^{(0)} + u'_z.
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения для полных перемещений в (3) и линеаризуя полученные соотношения, для возмущенных деформаций получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= (1 + a_0) \frac{\partial u_r}{\partial r} + b_1 \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \\
 \varepsilon_{zz} &= (1 + c_2) \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{(1 + a_0)}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) - \frac{b_1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right), \\
 \varepsilon_{r\theta} &= (1 + a_0) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + b_1 \left(-\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\
 \varepsilon_{\theta z} &= \frac{(1 + c_2)}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + (1 + a_0) \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - b_1 \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\
 \varepsilon_{rz} &= (1 + a_0) \frac{\partial u_r}{\partial z} + (1 + c_2) \frac{\partial u_z}{\partial r} + b_1 \frac{\partial u_\theta}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Следует отметить, что при начальном напряженном состоянии меняется плотность материала стержня. Плотность предварительно напряженного материала меняется, поскольку меняется объем единицы массы материала:

$$\rho_1 = \frac{\rho}{(1 + a_0)^2 (1 + c_2)}, \tag{5}$$

где ρ_1 — плотность предварительно напряженного материала; ρ — плотность исходного материала.

Подставляя (4) в зависимости (2) и (1), получим уравнения движения для изотропного материала.

Как известно, для изотропного тела закон Гука принимает следующий вид [3]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}), \\
 \sigma_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}), \\
 \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}), \\
 \sigma_{rz} &= \mu\varepsilon_{rz}, \\
 \sigma_{\theta z} &= \mu\varepsilon_{\theta z}, \\
 \sigma_{r\theta} &= \mu\varepsilon_{r\theta}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (4) в (5) и напряжения в (1), получаем уравнения движения материала.

$$\begin{aligned}
 (1 + a_0) &\left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \right] - \\
 &- \frac{b_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} (\lambda + 3\mu) u_r \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_0 \left((\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \right) + \\
& + \frac{1+a_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} (\lambda + 3\mu) u_\theta \right] + \\
& + (1+c_2)(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \\
& - b_0 \left[\mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r^2} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right] + \\
& + \frac{1+a_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\lambda + 3\mu) u_r \right] + \\
& + (1+a_0) \left[\mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r^2} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right] + \\
& + \frac{b_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} (\lambda + 3\mu) u_\theta \right] + \frac{(1+c_2)}{r} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}; \\
& - b_0 \left[\mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r^2} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right] + \\
& + \frac{1+a_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\lambda + 3\mu) u_r \right] + \\
& + (1+a_0) \left[\mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r^2} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right] + \\
& + \frac{b_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} (\lambda + 3\mu) u_\theta \right] + \\
& + \frac{(1+c_2)}{r} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}; \\
& (1+a_0) \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{b_0}{r} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta \partial z} + \right. \\
& + b_0 (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1+a_0}{r} (\lambda + \mu) \nu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \\
& \left. + (1+c_2) \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. М. : ВИНТИ, 1973.
2. Филиппов И. Г. О приближенных уравнениях колебания вязко-упругих стержней. М. : МГУ, 1979. С. 176—185.
3. Филиппов И. Г., Чебан В. Г. Математическая теория колебаний упругих и вязко-упругих пластин и стержней. Кишинев : Штиинца, 1998. 288 с.

1. Grigolyuk E. I., Selezov I. T. Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek // Itogi nauki i tekhniki. M. : VINITI, 1973.
2. Filippov I. G. O priblizhennykh uravneniyakh kolebaniya vyazko-uprugikh sterzhney. M. : MGU, 1979. S. 176—185.
3. Filippov I. G., Cheban V. G. Matematicheskaya teoriya kolebaniy uprugikh i vyazko-uprugikh plastin i sterzhney. Kishinev : Shtiintsa, 1998. 288 s.

© Гелюх П. А., Степанов Р. Н., 2014

*Поступила в редакцию
в феврале 2014 г.*

Ссылка для цитирования:

Гелюх П. А., Степанов Р. Н. Колебания предварительно напряженных стержней. Постановка общей задачи // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2014. Вып. 2(33). Ст. 21. Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>

For citation:

Gelyukh P. A., Stepanov R. N. [Fluctuation of prestressed rods. General problem formulation]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2014, no. 2(33), paper 21. (In Russ.). Available at: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>