

УДК 624.131

**А. Н. Богомолов, А. В. Прокопенко****ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ОСНОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ГРУНТА**

Приведены примеры расчета величины предельно допустимой нагрузки на основания на основе данных работ других авторов. В результате установлено, что величина коэффициента бокового давления грунта, величина модуля упругости материала штампа и ширина штампа оказывают существенное влияние на результат расчета. Установлено, что расчетное значение предельно допустимой нагрузки практически в одинаковой степени чувствительно к неадекватному назначению всех этих расчетных параметров. При этом разница значений получаемых результатов может достигать 60 % и более.

**Ключевые слова:** смешанная задача теории упругости и теории пластичности грунта, предельно допустимая нагрузка, коэффициент бокового давления грунта, модуль деформации основания, модуль упругости материала штампа, ширина штампа.

The article provides the examples of calculation of the size of maximum permissible loading on the foundation. The examples are based on works of other authors. As a result it was determined that the size of soil lateral pressure coefficient, the size of the elasticity module of stamp material and width have a great influence on the results of the calculation. It is established that the calculated value of maximum permissible loading is practically to the same extent sensitive to inadequate purpose of all these calculated parameters. And, the difference of values of the received results can be up to 60% and more.

**Key words:** mixed task of the elasticity theory and the soil plasticity theory, maximum permissible loading, soil lateral pressure coefficient, module of deformation of the foundation, module of stamp material elasticity, stamp width.

Физическая модель смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта подразумевает, что между упругими и пластическими областями имеется четкая граница; грунт, находящийся в упругой области, подчиняется законам линейной теории упругости, а в пластической — законам теории пластичности; в обеих областях выполняются уравнения равновесия.

В работах [1—5] показано, что напряжения в точках пластической области (помечены штрихом) вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_z &= \sigma_z ; \\ \sigma'_x &= \frac{\sigma_z (l - \sin \varphi) - 2\sigma_{cb} \sin \varphi}{l + \sin \varphi} ; \\ \tau'_{xz} &= \frac{(\sigma_z + \sigma_{cb})b \sin \varphi}{l + \sin \varphi} , \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $b = \operatorname{tg} 2\alpha^* = \operatorname{tg} 2[\alpha - (45^\circ + \varphi / 2)]$ ;  $l = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$  — компоненты напряжения в рассматриваемой точке, вычисленные при решении соответствующей задачи теории упругости.

Границы между упругими и пластическими областями определяются на основе соотношений (1—4)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(\tau_{zx} + \tau'_{zx})}{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma'_x}; \quad (2)$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{l(\sigma_z(3 + \cos 2\theta) + \sigma_x(1 - \cos 2\theta) + 2\tau_{zx} \sin 2\theta)}{-(\sigma_z + \sigma_x) + 2\sigma_{cb} + \cos 2\theta(\sigma_x - 3\sigma_z - 2\sigma_{cb}) - 2\sin 2\theta(\tau_{zx} + b(\sigma_z + \sigma_{cb}))}. \quad (3)$$

Численная реализация этого решения может быть осуществлена при помощи разработанной нами компьютерной программы [6], при использовании которой напряжения в грунтовом массиве определяются при помощи МКЭ.

Тестирование этой программы на различных примерах, приведенных в публикациях сторонних авторов, позволило выявить некоторые особенности, которые говорят о том, что надо подходить очень аккуратно к назначению переменных расчетных параметров при решении задач о несущей способности основания в смешанной постановке.

Рассмотрим примеры.

**А. Влияние величины коэффициента бокового давления.** В работе [7] приведена таблица, в которой помещены результаты обработки экспериментальных данных, приведенных, в частности, в работах [8—10]. В работе [8] приведено значение предельно допустимой нагрузки для основания круглого штампа  $d = 0,6$  м, имеющего следующие физико-механические свойства:  $\varphi = 36^\circ$ ;  $\gamma = 16,5$  кН/м<sup>3</sup>;  $C = 1$  кПа. Если перевести численное значение предельно допустимой нагрузки, приведенной в работе [7], в относительные единицы, то  $q_{\text{пд}}^{[7]} = 3,33\gamma d$ .

Данные о величине коэффициента бокового давления в работе [7] не приводятся. Поэтому для его определения мы воспользовались известной формулой

$$\xi_0 = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi / 2), \quad (4)$$

которая, как показано, дает результаты, адекватно отвечающие предельному состоянию грунта [11, 12]. В результате получили, что  $\xi_0 = 0,26$ .

На рис. 1 приведены области пластических деформаций, построенные при заданных условиях для момента их смыкания под подошвой штампа и при значении внешней нагрузки  $q_{\text{пд}}^{[7]} = 3,33\gamma d$ . Как видно из рис. 1, б, ОПД не только сомкнулись, но и сливаются, т. е. имеют зоны наложения. Отметим, что величина предельно допустимой нагрузки, полученной нами при расчете,  $q_{\text{пд}}^{\text{расчет}} = 2,86\gamma d$ , что на 14,1 % меньше, чем приведено в работе [7].

Нами проведены расчеты, в результате которых установлена величина коэффициента бокового давления, при которой смыкание пластических областей происходит при  $q_{\text{пд}}^{[7]} = 3,33\gamma d$ . Оказалось, что это значение  $\xi_0 = 0,28$ , что на 7,1 % больше, чем принятое при расчете.

Таким образом, для рассмотренного примера увеличение расчетной величины коэффициента бокового давления на 7,1 % влечет увеличение предельно допустимой нагрузки на 14,1 %.

В [10] приведены данные о величине предельно допустимой нагрузки на основание заглубленного круглого штампа  $d = 0,5$  м при  $h_3 = 0,5$  м;  $E_{гр} = 118$  МПа;  $\varphi = 36^\circ$ ;  $C = 4$  кПа;  $\gamma = 17,99$  кН/м<sup>3</sup>; данные о величине коэффициента бокового давления, как и ранее, отсутствуют. Если воспользоваться формулой (4), то получим, как и ранее,  $\xi_0 = 0,26$ .

Наши вычисления при этом значении коэффициента бокового давления дали результат  $q_{пд}^{0,26} = 10,3\gamma d$ , в то время как величина предельно допустимой нагрузки, приведенная в [10], равна  $q_{пд}^{[10]} = 15,5\gamma d$ , т. е. на 33,5 % больше, чем полученная нами.

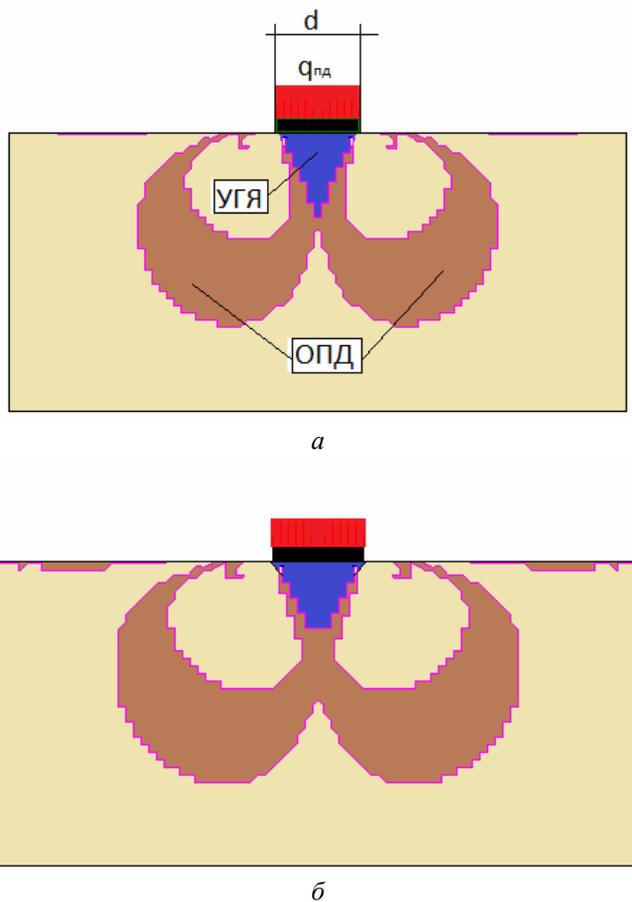


Рис. 1. Области пластических деформаций, построенные для условий рассмотренного примера при  $\xi_0 = 0,26$  и  $q_{пд}^{расчет} = 2,86\gamma d$  (а) и  $q_{пд}^{расчет} = 3,33\gamma d$  (б)

Однако если величину коэффициента бокового давления вычислить при помощи формулы Яки — Хартмана [13], то  $\xi_0 = 0,36$ . Расчет величины предельно допустимой нагрузки при этом дает значение  $q_{пд}^{0,36} = 16,5\gamma d$ , что

всего лишь на 6 % отличается от экспериментального значения, приведенного в [10].

Таким образом, и в этом случае величина расчетного значения  $\xi_0$  оказывает существенное влияние на результат.

В [14] приведены результаты конечноэлементного решения задачи о вдавливании штампа диаметром  $d = 33,85$  см в грунт при  $\gamma = 18$  кН/м<sup>3</sup>;  $\varphi = 33^\circ$ ;  $C = 0$ . Величина предельно допустимой нагрузки  $q_{\text{пд}}^{[14]} = 1,68\gamma d$ , при этом сказано, что  $\xi_0^{[14]} = 0,25$ , однако на основании чего принято это значение, не оговорено.

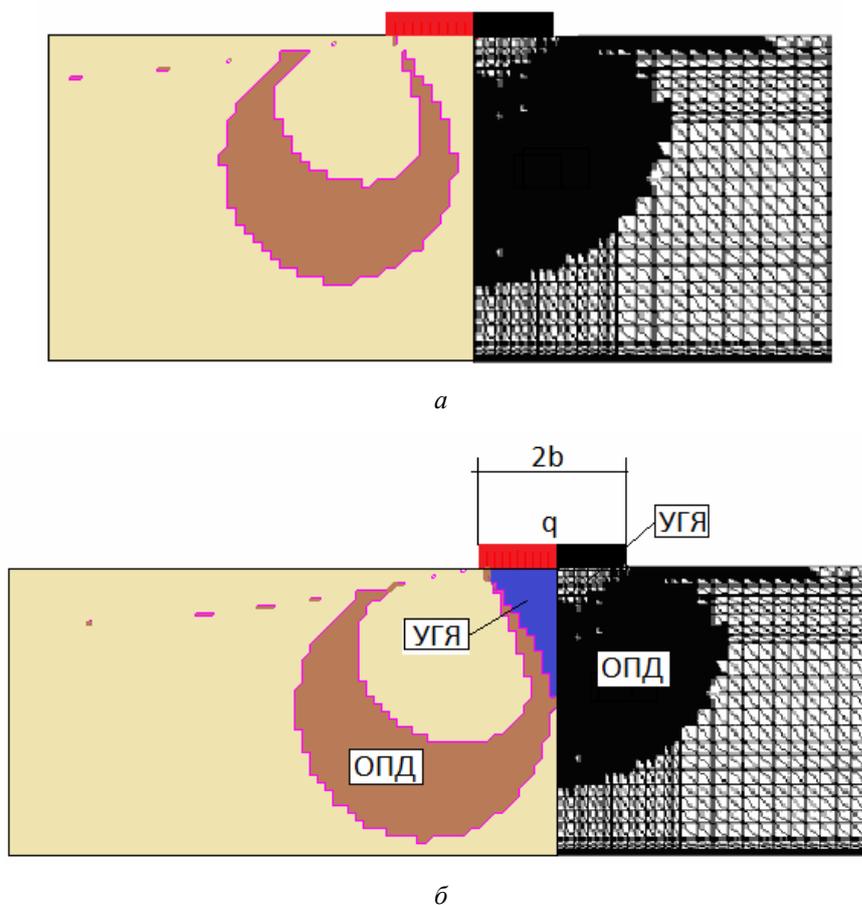


Рис. 2. Области пластических деформаций, построенные для условий работы [14] при  $\xi_0 = 0,25$  и  $q_{\text{пд}}^{[14]} = 1,68\gamma d$  (а) и при  $\xi_0 = 0,29$  и  $q_{\text{пд}}^{\text{расчет}} = 2,5\gamma d$  (б), а также приведенные в [14] (правые части рисунков)

Если для вычисления величины коэффициента бокового давления использовать формулу (4), то получим, что  $\xi_0 = 0,29$ .

На рис. 2 приведены изображения областей пластических деформаций, построенные при помощи программы [6] для условий рассматриваемого примера при  $\xi_0 = 0,25$  и при  $\xi_0 = 0,29$ . Из рис. 2, а видно, что при

$q_{\text{пд}}^{[14]} = 1,68\gamma d$  и  $\xi_0 = 0,25$  ОПД еще не сомкнулись под подошвой штампа, а их размеры практически такие же, как у приведенных в [14]. Если  $\xi_0 = 0,29$ , то смыкание ОПД под штампом происходит при  $q_{\text{пд}}^{\text{расчет}} = 2,5\gamma d$  (рис. 2, б), что на 32,8 % больше, чем  $q_{\text{пд}}^{[14]} = 1,68\gamma d$ . Области пластических деформаций при этом несколько больше приведенных в [14].

**Б. Влияние отношения модулей деформации материала штампа и грунта  $E_{\text{ш}}/E_0$ .** В работе [9] приведены данные о несущей способности основания квадратного штампа размерами  $a \times b = 1 \times 1$  м при глубине заложения  $h_3 = 4,18$  м и следующих физико-механических свойствах основания:  $\varphi = 37^\circ$ ;  $\gamma = 16,8$  кН/м<sup>3</sup>;  $C = 10$  кПа;  $E_0 = 53,4$  МПа. О величине коэффициента бокового давления грунта и модуля упругости материала штампа сведения не приводятся.

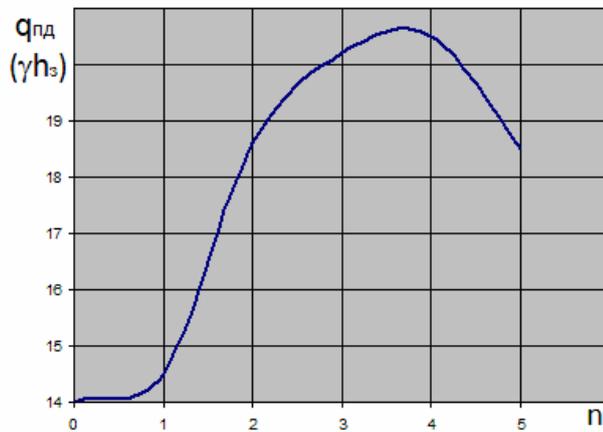


Рис. 3. Графическая зависимость вида  $q_{\text{пд}}^{\text{расчет}} = f(|n|)$ , построенная для описанных условий

Используя формулу (1), установили, что величина  $\xi_0 = 0,249$ , которую и приняли за расчетную. Затем выполнены расчеты величины несущей способности основания при условии, что  $E_0/E_{\text{ш}} = 10^n = 10^0; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}$ , результаты которых в виде графической зависимости вида  $q_{\text{пд}}^{\text{расчет}} = f(|n|)$  приведены на рис. 3. Из этого рисунка видно, что максимальное значение величины предельно допустимой нагрузки соответствует условию  $3 < |n| < 4$ . При этом величина предельно допустимой нагрузки, приведенная в [9],  $q_{\text{пд}}^{[9]} = 10,1\gamma h_3$ , а полученный при расчете максимум нагрузки  $q_{\text{пд}}^{\text{расчет}} = 20,7\gamma h_3$ , т. е. более чем в 2 раза больше.

Ниже на рис. 4 приведены изображения областей пластических деформаций, полученных при расчете. Из рис. 4 видно, что ОПД можно разделить на три группы: 1ОПД — пластические области, образование которых влечет за собой обрушение незакрепленных бортов котлована; 2ОПД — пластические области, обеспечивающие выпор грунта; 3ОПД — пластические области, развитие которых вызывает прогрессирующие осадки штампа.

Из рис. 4 также видно, что при росте величины  $|n|$  до 3 размеры ЗОПД уменьшаются, а затем вновь увеличиваются, а 1ОПД и 2ОПД сливаются, а затем опять разделяются.

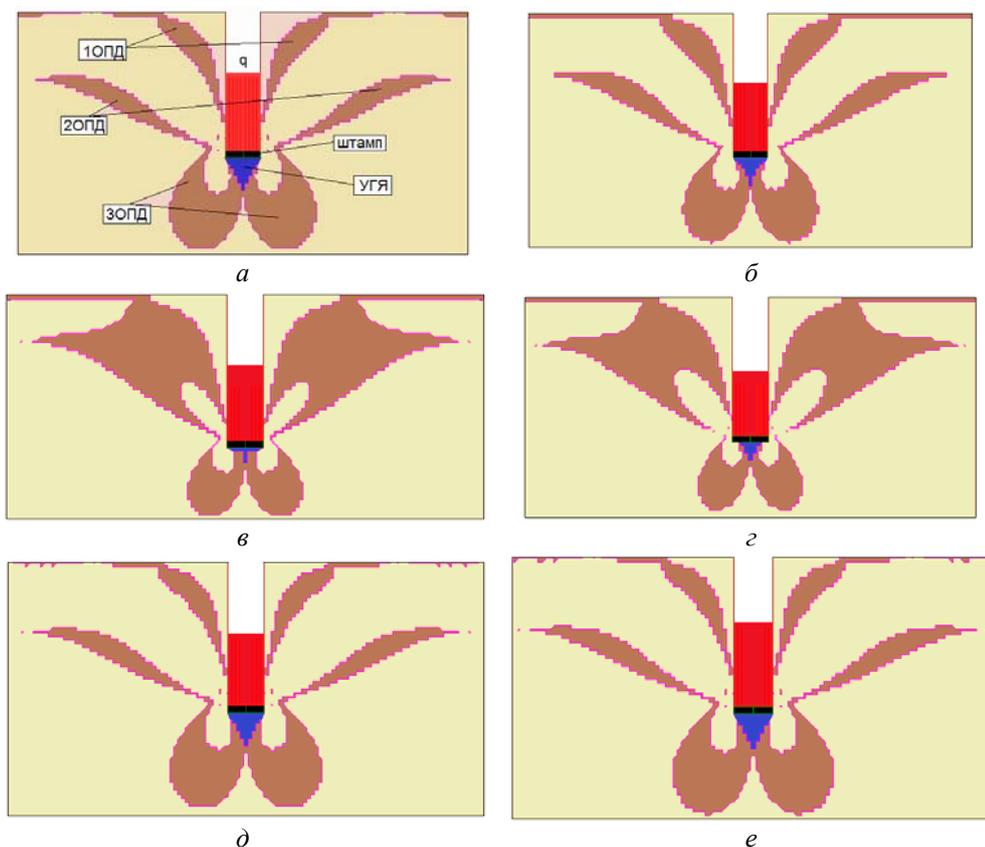


Рис. 4. Области пластических деформаций, соответствующие предельно допустимым нагрузкам на основание штампа для условий рассматриваемого примера при  $E_0/E_{ш} = 10^n = 10^0$  (а);  $10^{-1}$  (б);  $10^{-2}$  (в);  $10^{-3}$  (г);  $10^{-4}$  (д) и  $10^{-5}$  (е)

**В. Влияние ширины штампа.** При выполнении поверочных расчетов несущей способности оснований для отработки параметров расчетной схемы нами использованы примеры, приведенные в работе [15]. В частности, при исследовании вопроса о влиянии ширины штампа на величину интенсивности равномерно распределенной нагрузки, соответствующей ее предельно допустимому значению. В результате построены графические зависимости вида  $q_{пд} = f(b)$ , где  $b$  — ширина штампа, часть которых приведена на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что при  $C \neq 0$  увеличение ширины штампа влечет за собой снижение величины интенсивности предельно допустимого значения равномерно распределенной нагрузки, которое при  $C = 0,5$  МПа, например, может составлять 60 %. Если  $C = 0$ , то величина  $q_{пд}$  не только не снижается, но увеличивается на 3—5 %.

**Выводы.** При численной реализации приближенного аналитического решения задачи о несущей способности оснований фундаментов следует осто-

можно подходить к назначению расчетных значений коэффициента бокового давления грунта, модуля упругости материала штампа и его ширины, т. к. принятие неадекватных значений может изменить результат решения на величину от 20 до 60 % и более.

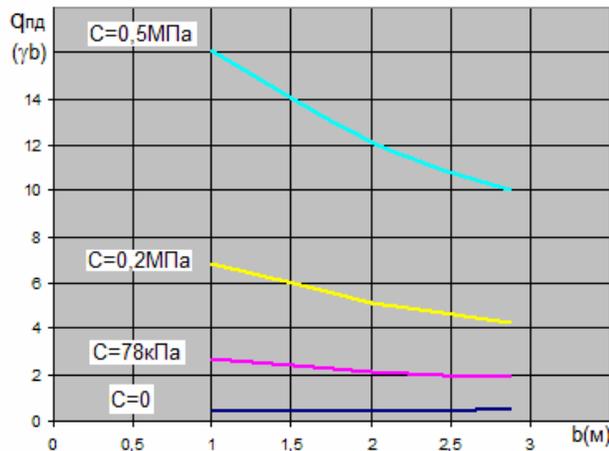


Рис. 5. Графические зависимости вида  $q_{нд} = f(b)$  при условии, что  $\varphi = 30^\circ$  и  $\xi_0 = 0,79$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Богомолов А. Н. Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке. Пермь: ПГТУ, 1996. 150 с.
2. Развитие областей пластических деформаций в однородном основании гибкого ленточного фундамента в рамках модели смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, А. И. Вайнгольц, В. В. Подтелков // Интернет-вестник ВолГАСУ. Сер.: Политематическая. 2013. Вып. 2(27). Ст. 7. URL: <http://vestnik.vgasu.ru/>
3. Напряженное состояние и области пластических деформаций в однородном основании ленточного фундамента в условиях смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, А. И. Вайнгольц, А. В. Прокопенко, А. В. Соловьев // Инновационные конструкции и технологии в фундаментостроении и геотехнике: материалы науч.-технич. конф. 27—29 октября 2013 г. М.: НОУ ВПО «ИНЕП»: Издательство «Палеотип», 2013. С. 9—22.
4. Богомолов А. Н., Богомолова О. А. Смешанная задача теории упругости и теории пластичности грунта для однородного основания // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Стр-во и архит. 2013. Вып. 33(52). С. 13—22.
5. Bogomolov A. N., Bogomolova O. A. Mixed task of the theory of elasticity and theory of plasticity of soil for the uniform basis // Збірник наукових праць (Галузеве машинобудування, будівництво). Вип. 3(38). Т. 1. ПолтНТУ, 2013. С. 3—15.
6. Устойчивость (напряженно-деформированное состояние): свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ: пат. Рос. Федерации № 2009613499 / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, М. Ю. Нестратов, Н. Н. Нестратов, Н. Н. Потапова, М. М. Степанов, А. Н. Ушаков; опубли. 18.12.2009, Бюл. № 23; заявл. 19.05.2009; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 30.06.2009. 1 с.
7. Киричек Ю. А., Трегуб А. В. О надежности работы оснований в нелинейной области // Збірник наукових праць (серія: Галузеве машинобудування, будівництво). Полтава, 2008. Вип. 22. С. 25—31.
8. Скормин Г. А., Малышев М. В. Экспериментальное исследование распределения напряжений в песчаном основании под круглым фундаментом в процессе роста нагрузки // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1970. № 5. С. 1—4.

9. Кушнер С. Г. Расчет осадок оснований зданий и сооружений. Киев : Будівельник, 1990. 145 с.
10. Заключение по результатам исследования грунтового основания моноблоков Запорожской АЭС. Днепропетровск : ДИСИ, 1985. 20 с.
11. Богомолов А. Н., Вихарева О. А., Шиян В. И. К вопросу о минимальных значениях коэффициента бокового давления грунтов // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архит. 2007. Вып. 7(26). С. 6—10.
12. Коэффициент бокового давления грунта как одна из величин, определяющих несущую способность однородного основания ленточного фундамента / А. Н. Богомолов, С. А. Калиновский, О. А. Богомолова, А. В. Прокопенко // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архит. 2013. Вып. 31(50). С. 251—257.
13. Черняев В. Ф. К определению коэффициента бокового давления покоя // Основания и фундаменты : сб. Воронеж : ВИСИ, 1975. № 2. С. 79—84.
14. Парамонов В. Н. Конечноэлементное решение задачи о вдавлении штампа // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 2000. № 3.
15. Горшков Н. И., Краснов М. А. Способ оценки несущей способности основания и устойчивости системы «штамп — основание» на основе МКЭ // Вестник ТОГУ. Сер.: Строительство и транспорт. 2010. № 3(18). С. 141—150.

1. *Bogomolov A. N.* Raschet nesushchei sposobnosti osnovanii sooruzhenii i ustoichivosti gruntovykh massivov v uprugoplasticheskoi postanovke. Perm': PGTU, 1996. 150 с.

2. Razvitiye oblasti plasticheskikh deformatsii v odnorodnom osnovanii gibkogo lentochного фундамента v ramkakh modeli smeshannoi zadachi teorii uprugosti i teorii plastichnosti grunta / A. N. Bogomolov, O. A. Bogomolova, A. I. Vaingol'ts, V. V. Podtelkov // Internet-vestnik VolgGASU. Ser.: Politematicheskaya. 2013. Vyp. 2(27). St. 7. URL: <http://vestnik.vgasu.ru/>

3. Napryazhennoe sostoyanie i oblasti plasticheskikh deformatsii v odnorodnom osnovanii lentochного фундамента v usloviyakh smeshannoi zadachi teorii uprugosti i teorii plastichnosti grunta / A. N. Bogomolov, O. A. Bogomolova, A. I. Vaingol'ts, A. V. Prokopenko, A. V. Solov'ev // Innovatsionnye konstruksii i tekhnologii v fundamentostroenii i geotekhnike: materialy nauch.-tekhnich. konf. 27—29 oktyabrya 2013 g. M. : NOU VPO «INEP» : Izdatel'stvo «Paleotip», 2013. S. 9—22.

4. *Bogomolov A. N., Bogomolova O. A.* Smeshannaya zadacha teorii uprugosti i teorii plastichnosti grunta dlya odnorodного osnovaniya // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvenного arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Ser.: Str-vo i arkhит. 2013. Vyp. 33(52). S. 13—22.

5. *Bogomolov A. N., Bogomolova O. A.* Mixed task of the theory of elasticity and theory of plasticity of soil for the uniform basis // Zbirnik naukovikh prats' (Galuzeve mashinobuduvannya, budivnitstvo). Vip. 3(38). T. 1. PolNTU, 2013. S. 3—15.

6. Ustoichivost' (napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie) : svidetel'stvo o gos. registratsii programmy dlya EVM : pat. Ros. Federatsii № 2009613499 / A. N. Bogomolov, O. A. Bogomolova, M. Yu. Nestratov, N. N. Nestratov, N. N. Potapova, M. M. Stepanov, A. N. Ushakov ; opubl. 18.12.2009, Byul. № 23 ; zayavl. 19.05.2009 ; zareg. v Reestre programm dlya EVM 30.06.2009. 1 s.

7. *Kirichek Yu. A., Tregub A. V.* O nadezhnosti raboty osnovanii v nelineinoy oblasti // Zbirnik naukovikh prats' (seriya: Galuzeve mashinobuduvannya, budivnitstvo). Poltava, 2008. Vip. 22. S. 25—31.

8. *Skormin G. A., Malyshev M. V.* Eksperimental'noe issledovanie raspredeleniya napryazhenii v peschanom osnovanii pod kruglym fundamentom v protsesse rosta nagruzki // Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov. 1970. № 5. S. 1—4.

9. *Kushner S. G.* Raschet osadok osnovanii zdaniy i sooruzhenii. Kiev : Budivel'nik, 1990. 145 s.

10. Zaklyuchenie po rezul'tatam issledovaniya gruntovogo osnovaniya monoblokov Zaporozhskoi AES. Dnepropetrovsk : DISI, 1985. 20 s.

11. *Bogomolov A. N., Vihareva O. A., Shiyen V. I.* K voprosu o minimal'nykh znacheniyakh koeffitsienta bokovogo davleniya gruntov // Vestn. Volgogr. gos. arkhит.-stroit. un-ta. Ser.: Str-vo i arkhит. 2007. Vyp. 7(26). S. 6—10.

12. Koeffitsient bokovogo davleniya grunta kak odna iz velichin, opredelyayushchikh nesushchuyu sposobnost' odnorodного osnovaniya lentochного фундамента / A. N. Bogomolov, S. A. Kalinovskii, O. A. Bogomolova, A. V. Prokopenko // Vestn. Volgogr. gos. arkhит.-stroit. un-ta. Ser.: Str-vo i arkhит. 2013. Vyp. 31(50). S. 251—257.

13. *Chernyaev V. F.* K opredeleniyu koeffitsienta bokovogo davleniya pokoya // Osnovaniya i fundamenti : sb. Voronezh : VISI, 1975. № 2. S. 79—84.
14. *Paramonov V. N.* Konechnoelementnoe reshenie zadachi o vdavlivanii shtampa // Rekonstruktsiya gorodov i geotekhnicheskoe stroitel'stvo. 2000. № 3.
15. *Gorshkov N. I., Krasnov M. A.* Sposob otsenki nesushchei sposobnosti osnovaniya i us-toichivosti sistemy «shtamp — osnovanie» na osnove MKE // Vestnik TOGU. Ser.: Stroitel'stvo i transport. 2010. № 3(18). S. 141—150.

© Богомолов А. Н., Прокопенко А. В., 2015

*Поступила в редакцию  
в феврале 2014 г.*

*Ссылка для цитирования:*

*Богомолов А. Н., Прокопенко А. В.* Особенности численного решения задачи о несущей способности основания в условиях смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2015. Вып. 1(37). Ст. 18. Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>

*For citation:*

Bogomolov A. N., Prokopenko A. V. [Peculiarities of the numerical solution to the problem of bearing capacity of foundation under conditions of mixed task of the elasticity theory and the soil plasticity theory]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2015, no. 1(37), paper 18. (In Russ.). Available at: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>