

УДК 624.131

А. Н. Богомолов, А. В. Прокопенко**СОПОСТАВЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ,
ПОСТРОЕННЫХ ПРИ УПРУГОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ
В ОСНОВАНИИ ФУНДАМЕНТА И ДЛЯ УСЛОВИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ГРУНТОВ**

Приведены результаты сравнения областей пластических деформаций в связном основании заглубленного ленточного фундамента, построенные при использовании условия прочности Кулона и аналитического решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта. Приведены иллюстрации, позволяющие оценить глубину развития ОПД вглубь основания в зависимости от величины отношения ширины фундамента к глубине его заложения и интенсивности внешнего воздействия. Приведены изображения областей пластических деформаций, полученных нами и другими авторами для условий упругопластической задачи, проведено их сравнение.

Ключевые слова: смешанная задача теории упругости и теории пластичности грунта, условие прочности Кулона, области пластических деформаций, глубина развития пластических деформаций, коэффициент бокового давления.

The article provides the results of comparison of the areas of plastic deformations in cohesive basis of the buried tape foundation, built using the conditions of Coulomb strength and the analytical solution of mixed task of the elasticity theory and the soil plasticity theory. The illustrations allowing to estimate the depth of the development of exhaust deep into of the basis depending on the size of base width to the depth of its embedding and intensity of external influence are given. The pictures of the areas of the plastic deformations received by the authors of the article and other ones for conditions of elastic-plastic task are provided, and the comparison is carried out.

Key words: mixed task of the elasticity theory and the soil plasticity theory, Coulumb strength condition, areas of plastic deformations, depth of development of plastic deformations, lateral pressure coefficient.

Одним из приемов, наиболее часто используемых при определении областей пластических деформаций в основании заглубленного фундамента, является использование условия прочности Кулона [1] для прямолинейных огибающих предельных кругов, которое может быть записано одним из приведенных ниже способов:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_{св}) \sin \varphi, \\ \text{или} \\ (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = (\sigma_x + \sigma_z + 2\sigma_{св})^2 \sin^2 \varphi, \\ \text{или} \\ \operatorname{tg} \theta_{\max} = \operatorname{tg} \varphi, \end{array} \right\} \quad (1)$$

где σ_1 и σ_2 — главные нормальные напряжения; σ_x , σ_z и τ_{xz} — компоненты полного напряжения в той же точке, $\sigma_{св} = C(\rho g h_3 \operatorname{tg} \varphi)^{-1}$ — приведенное давление связности (C , φ , $\theta_{\max}$, ρ , g и h_3 — удельное сцепление, угол внутреннего трения, угол максимального отклонения, плотность грунта, ускорение свободного падения и глубина заложения фундамента соответственно).

Напряженно-деформированное состояние однородного основания заглубленного фундамента можно определить, используя решение первой основной задачи теории упругости для весомой однородной и изотропной полуплоскости с криволинейной границей [2] методами теории функций комплексного переменного [3].

Функция, совершающая конформное отображение нижней полуплоскости $ImZ < 0$ на исследуемую область, имеет вид [2]

$$z = \omega(\zeta) = C_0 + C\zeta - \sum_{k=0}^n \frac{C_{2k+1}}{(\zeta + a - bi)^{2k+1}}, \quad (2)$$

где $z = x + iy$; $\zeta = \xi + i\eta$, C_0 , C , C_{2k+1} — любые, в том числе и комплексные, коэффициенты; a и b — действительные числа; $b > 0$.

Подбирая соответствующим образом коэффициенты отображающей функции (2), можно добиться того, что она будет конформно отображать множество $ImZ < 0$ на полуплоскость с трапециевидным вырезом при различных значениях величины отношения глубины выреза к его нижнему основанию. Это дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние основания фундамента при различных значениях относительной глубины его заложения $2b / h_3$.

Если напряженно-деформированное состояние грунтового массива известно, то области пластических деформаций можно построить следующим образом [4].

Известно [2, 4], что величина коэффициента устойчивости в точке грунтового массива определяется выражением

$$K_T = \frac{\left[\frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \tau_{xz} \sin 2\alpha + \sigma_{cb} \right] \operatorname{tg} \varphi}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha}, \quad (3)$$

где α — угол наклона площадки сдвига.

Если исследовать выражение (3) на экстремум, то можно получить формулу, определяющую такое значение угла α , при котором выражение (3) при всех прочих равных условиях будет принимать минимальное значение ($K_T = K_{T\min}$), а сама площадка будет являться наиболее вероятной площадкой сдвига [4]:

$$\sin 2\alpha_{1,2} = -\frac{2\tau_{xz}}{B} \pm (\sigma_z - \sigma_x) \sqrt{\frac{B^2 - D}{B^2 D}}, \quad (4)$$

где

$$B = (\sigma_z + \sigma_x + 2\sigma_{cb}); \quad D = 4\tau_{xz}^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2.$$

Если в точках грунтового массива вычислить минимальные значения $K_{T\min}$, а затем соединить плавными линиями точки, в которых выполняется условие $K_{T\min} = 1$, то эти линии будут являться границами областей пластических деформаций.

На рис. 1 в качестве примера приведены изображения областей пластических деформаций (ОПД), построенные на основании выражений (1) при условии, что $2b/h_3 = 0,5; 1,5; 2,5$, а грунт основания имеет следующие физико-механические свойства: удельное сцепление $C = 0,0196$ МПа; угол внутреннего трения $\varphi = 16^\circ$; объемный вес грунта $\gamma = 1,764$ т/м³; величина коэффициента бокового давления $\xi_0 = 0,75$, что соответствует глинистым грунтам [5].

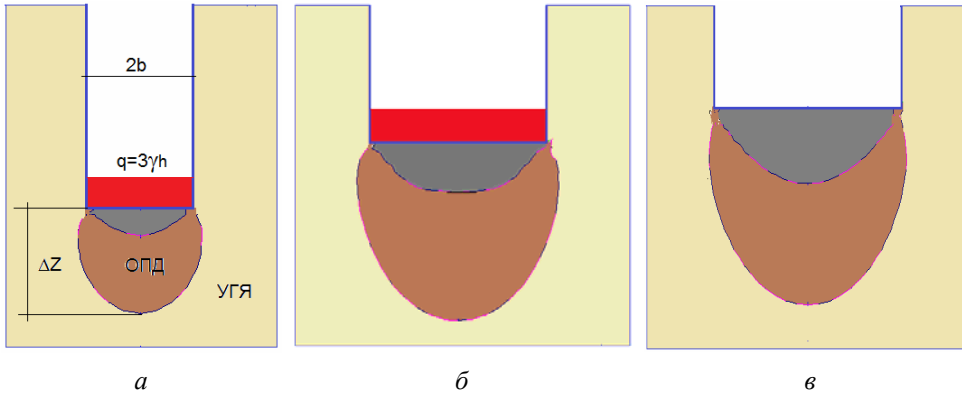


Рис. 1. ОПД в основании заглубленных фундаментов, построенные на основе условия пластичности, при $q = 3\gamma h_3$: а — $2b/h_3 = 0,5$; б — $2b/h_3 = 1,5$; в — $2b/h_3 = 2,5$

Отметим следующее. Если для определения напряжений используется решение теории упругости, то внутри ОПД, построенных на основе выражений (1), возникает физически недопустимое напряженное состояние, когда не выполняется условие пластичности (1). Поэтому построенные таким образом ОПД не будут истинными.

Для того чтобы исключить данное обстоятельство, следует проводить анализ напряженного состояния основания фундамента, используя решение смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта, приведенное в [2].

Соотношения, определяющие размер, форму и положение областей пластических деформаций, получены в виде [2]

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2\{\tau_{xz}l + \sin \varphi [\tau_{xz} - b(\sigma_z + \sigma_{cb})]\}}{(\sigma_x - \sigma_z)(l + \sin \varphi) + 2\sin \varphi(\sigma_z + \sigma_{cb})}, \\ \sin \varphi_0 &= \frac{l(1 + \cos 2\theta)(\sigma_z - \sigma_x) + 2\tau_{xz}l \sin 2\theta}{(1 + \cos 2\theta)(\sigma_x - \sigma_z - 2\sigma_{cb}) - 2\sin 2\theta[b(\sigma_z + \sigma_{cb}) + \tau_{xz}]} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где θ — угол между положительным направлением оси X и касательной, проведенной в данной точке границы ОПД; φ_0 — «граничное» значение угла внутреннего трения грунта (аналог угла максимального отклонения: линия $\varphi_0 = \varphi$ — граница области пластических деформаций); $b = \operatorname{tg} 2\alpha^*$; $l = (1 + b^2)^{0,5}$; $\alpha^* = \alpha - (45^\circ + \varphi/2)$; $\sigma_z, \sigma_x, \tau_{xz}$ — безразмерные (в долях γh_3) компоненты полного напряжения, найденные из аналитического решения соответствующей задачи теории упругости [2] для данного шага нагружения.

На рис. 2 приведены изображения пластических областей, построенные на основе решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта [2], а на рис. 3 — графические зависимости вида $\Delta Z = f(q)$, построенные для обоих рассмотренных случаев. Отметим, что все вычисления выполнены при помощи компьютерной программы [6].

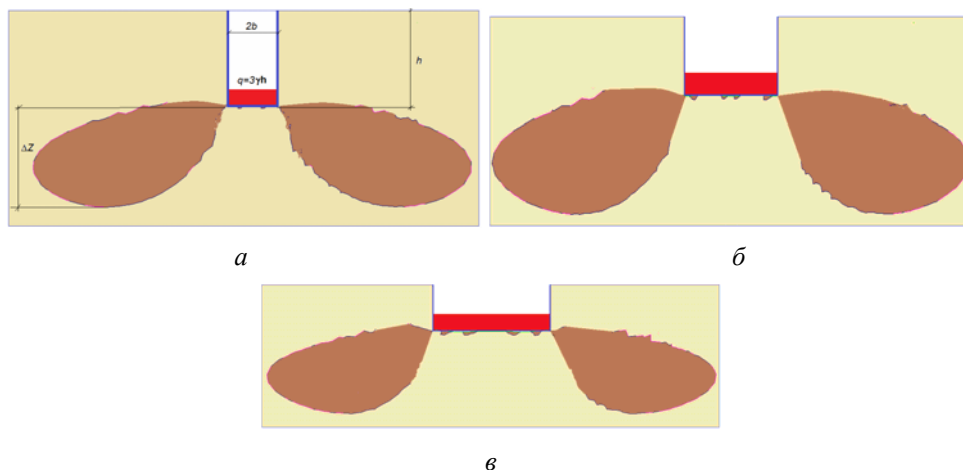


Рис. 2. ОПД в основании заглубленных фундаментов, построенные на основе решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта [2], при $q = 3\gamma h_3$: а — $2b/h_3 = 0,5$; б — $2b/h_3 = 1,5$; в — $2b/h_3 = 2,5$

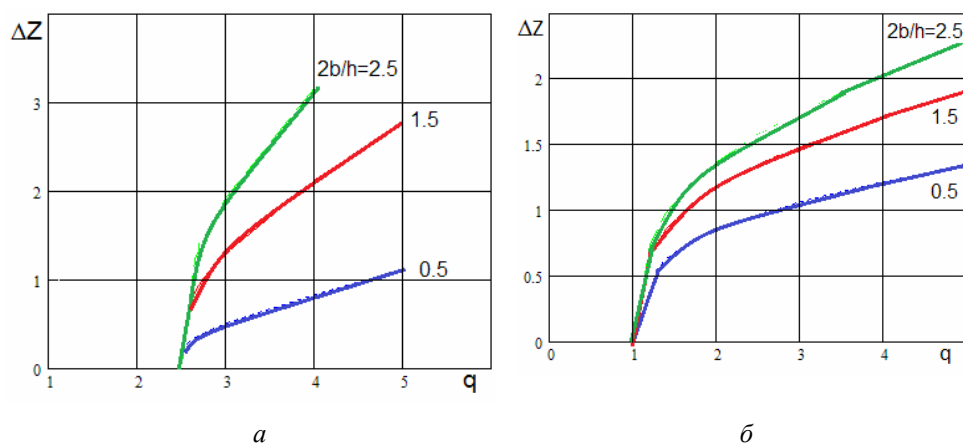


Рис. 3. Графические зависимости вида $\Delta Z = f(q)$, построенные на основе использования: а — условия пластичности, б — решения смешанной задачи

Сравнивая изображения, приведенные на рис. 1, 2 и 3, видим, что при принятых условиях:

- 1) в первом случае ОПД развиваются непосредственно под фундамент, а во втором — в стороны от него;
- 2) при росте интенсивности внешнего воздействия ОПД, построенные на основании смешанного решения, приближаются к дневной поверхности, постепенно формируя призмы выпора грунта;

3) зарождение ОПД в обоих случаях происходит при достижении интенсивностью внешнего воздействия некоторой определенной величины, при которой преодолевается внутреннее сопротивление грунта сдвигу; величина этой нагрузки не зависит от геометрического параметра фундамента $2b/h_3$;

4) в случае упругопластического распределения напряжений в активной зоне фундамента величина первой критической нагрузки меньше, чем при упругом распределении, однако в этом случае «скорость» роста ОПД гораздо выше;

5) чем больше величина отношения $2b/h_3$, тем больше при всех прочих равных условия глубина развития ОПД.

На рис. 4 приведены результаты численного исследования нелинейно-деформируемого основания при помощи метода [7]. Материал основания подчиняется обобщенному закону Гука с переменным модулем сдвига G :

$$G = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{-\sigma \operatorname{tg} \varphi + c}{B + \varepsilon_i} = \frac{(\gamma y - K\theta) \operatorname{tg} \varphi + c}{B + \varepsilon_i}, \quad (6)$$

где φ , γ и c — угол внутреннего трения, объемный вес и удельное сцепление грунта соответственно; y — расстояние от рассматриваемой точки до поверхности грунта; $\theta = e_x + e_y$; ε_i и σ_i — инварианты деформаций и напряжений соответственно; $K = \operatorname{const}$ — модуль объемной деформации грунта; B — постоянная величина, характерная для данного вида грунта; закон распределения напряжений от собственного веса грунта — гидростатический, т. е. коэффициент бокового давления грунта принят равным $\xi_0 = 1$.

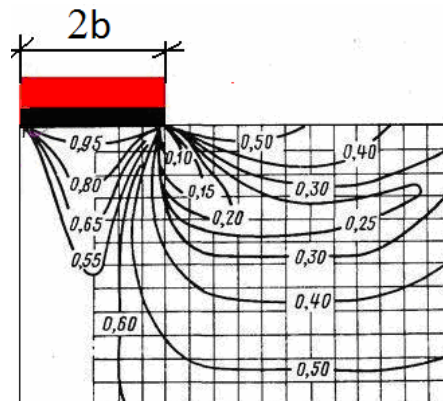


Рис. 4. Изолинии модулей сдвига G в основании штампа при критической нагрузке (цит. по [7])

В [7] сказано, что «наглядное представление о развитии упругих и пластических областей в грунте получено путем анализа изолиний модулей сдвига... В процессе увеличения нагрузки под штампом формируется область с новыми значениями модулей сдвига, границы которой не зависят от нагрузки... При предельной нагрузке на основание модуль сдвига под краями штампа уменьшается в 4—5 раз по сравнению с начальными значениями и меньше значения G под штампом в 8—9 раз. Зоны пониженных модулей сдвига распространяются на $1,5b$ вглубь основания и на $(3,0...3,5)b$ влево и вправо

от боковых граней штампа. Пониженные значения G свидетельствуют о формировании в грунте пластических областей, а зоны распространения пониженных G соответствуют нашим экспериментальным данным».

На рис. 5 изображены картины изолиний модулей сдвига G в основании штампа при критической нагрузке, которые приведены в [7] (справа). К сожалению, авторы [7] не идентифицируют ни одну из изолиний параметра G с границей области пластических деформаций, однако форма, положение и направление развития пластических областей качественно совпадают с представленными нами на рис. 3.

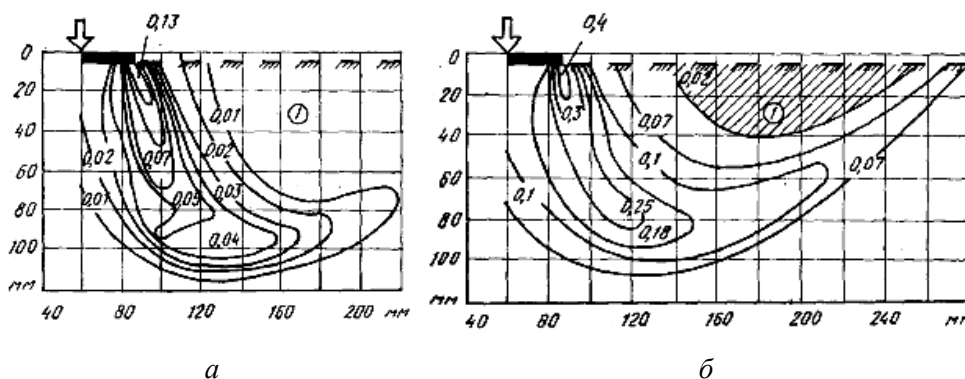


Рис. 5. Изолинии деформаций сдвига при осадке штампа, соответствующей моменту до наступления предельной нагрузки (а); соответствующей запредельной по устойчивости нагрузке (б) (цит. по [8])

В работе [8] авторы изучают деформации песчаного основания полосового штампа. Анализируя полученные результаты, они приходят к выводу о том, что границы ОПД можно идентифицировать с изолиниями нулевых значений деформаций сдвига, возникающих при осадке штампа. Сравнивая формы ОПД, приведенных на рис. 2 и 5, можно говорить об определенной степени их подобия.

Таким образом, ОПД, построенные на основании аналитического решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта, по форме и размерам подобны тем, что получены в результате численных и экспериментальных исследований другими авторами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Coulomb C.* Application des règles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture // Memoires de savants etrangers de L'Academie des sciences de Paris, 1773.
2. *Богомолов А. Н.* Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке. Пермь : Пермский государственный технический университет, 1996. 150 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1996. 709 с.
4. *Цветков В. К.* Расчет рациональных параметров горных выработок. М. : Недра, 1993. 251 с.
5. *Вялов С. С.* Реологические основы механики грунтов. М. : Высш. шк., 1978. 447 с.
6. Устойчивость (напряженно-деформированное состояние): свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ : пат. № 2009613499 / А. Н. Богомолов, М. Ю. Нестратов, Н. Н. Потапова и др. ; опубл. 18.12.2009, Бюл. № 23 ; заявл. 19.05.2009 ; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 30.06.2009.

7. Федоровский В. Г., Кагановская С. Е. Жесткий штамп на нелинейно-деформируемом связанном основании (плоская задача) // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1975. № 1. С. 41—44.

8. Болдырев Г. Г., Никитин Е. В. Деформации песка в основании полосового штампа // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1987. № 1. С. 26—28.

1. *Coulomb C.* Application des règles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture // Memoires de savants etrangers de L'Academie des sciences de Paris, 1773.

2. *Bogomolov A. N.* Raschet nesushchei sposobnosti osnovanii sooruzhenii i ustoychivosti gruntovykh massivov v uprugoplasticheskoi postanovke. Perm' : Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 1996. 150 s.

3. *Muskhelishvili N. I.* Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. M. : Nauka, 1996. 709 s.

4. *Tsvetkov V. K.* Raschet ratsional'nykh parametrov gornykh vyrabotok. M. : Nedra, 1993. 251 s.

5. *Iyalov S. S.* Reologicheskie osnovy mekhaniki gruntov. M. : Vyssh. shk., 1978. 447 s.

6. Ustoychivost' (napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie): svidetel'stvo o gos. registratsii programm dlya EVM : pat. № 2009613499 / A. N. Bogomolov, M. Yu. Nestratov, N. N. Potapova i dr. ; opubl. 18.12.2009, Byul. № 23 ; zayavl. 19.05.2009 ; zareg. v Reestre programm dlya EVM 30.06.2009.

7. *Fedorovskii V. G., Kaganovskaya S. E.* Zhestkii shtamp na nelineynno-deformiruемом svyaznom osnovanii (ploskaya zadacha) // Osnovaniya, fundamente i mekhanika gruntov. 1975. № 1. S. 41—44.

8. *Boldyrev G. G., Nikitin E. V.* Deformatsii peska v osnovanii polosovogo shtampa // Osnovaniya, fundamente i mekhanika gruntov. 1987. № 1. S. 26—28.

© Богомолов А. Н., Прокопенко А. В., 2014

Поступила в редакцию
в декабре 2014 г.

Ссылка для цитирования:

Богомолов А. Н., Прокопенко А. В. Сопоставление областей пластических деформаций, построенных при упругом распределении напряжений в основании фундамента и для условий смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунтов // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2014. Вып. 4(35). Ст. 12. Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>

For citation:

Bogomolov A. N., Prokopenko A. V. [Comparison of the areas of plastic deformations constructed at nonrigid stress distribution in foundation and under conditions of mixed task of the elasticity theory and the soil plasticity theory]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2014, no. 4(35), paper 12. (In Russ.). Available at: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>