

УДК 624.131

А. Н. Богомолов, Е. В. Цветкова**ОПТИМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ВЫРАБОТОК И ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ИХ КОНТУРАХ**

Приводятся функции, отображающие внутренность единичного круга на внешность различных отверстий в бесконечной плоскости. Эта функция используется при решении задач теории упругости для подземных достаточно заглубленных грунтовых выработок при определении их рациональных поперечных сечений. Анализируется влияние линейных размеров поперечных сечений выработок, а также коэффициента бокового давления ненарушенного массива горных пород на величину контурных напряжений. В частности, приводятся графики для определения оптимальных размеров сечений различных выработок в зависимости от величины коэффициента бокового давления.

К л ю ч е в ы е с л о в а: отображающая функция, контур подземной выработки, кровля выработки, коэффициент бокового давления, напряженное состояние, растягивающие напряжения.

The functions mapping an interior of unit disk on exterior of different openings in the infinite plane are given. This function is used when finding solution to the tasks of the elasticity theory for underground buried enough soil developments when determining their rational cross sections. The impact of linear sizes of cross sections of the developments, as well as lateral pressure coefficient of the undisturbed massif of rocks on the size of contour tension is analyzed. In particular, schedules for the determination of optimum sizes of sections of various developments depending on the size of lateral pressure coefficient are provided.

Key words: mapping function, contour of underground development, roof, lateral pressure coefficient, stress state, tension strength.

Известно, что на устойчивость выработок влияет большое число факторов. В частности, распределение напряжений в контурных точках зависит от величины коэффициента бокового давления не нарушенного выработкой грунтового массива и формы поперечного сечения выработки. Для выяснения этой зависимости, рассматривая горный массив как однородную линейно деформируемую среду, решим соответствующие задачи теории упругости, используя теорию функций комплексного переменного [1].

Примем отображающую функцию в виде

$$z = \omega(\zeta) = i(A\zeta^{-1} + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3). \quad (1)$$

Эта функция при определенных значениях действительных величин A, B, C, D с достаточной для практики степенью точности отображает внутренность единичного круга на внешность различных отверстий.

Отделяя в выражении (1) вещественную часть от мнимой и полагая $\zeta = \sigma = l^{i\theta}$, получим уравнения контуров отверстий в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x &= (A - B)\sin\theta - C\sin 2\theta - D\sin 3\theta; \\ y &= (A + B)\cos\theta + C\cos 2\theta + D\cos 3\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

На рис. 1, 2 по формулам (2) построены некоторые из рассматриваемых контуров при различных соотношениях их геометрических размеров. Во всех случаях начало координат расположено внутри отверстия и находится на расстоянии δ от нижней его точки. Ось Oy направлена вертикально вверх и является осью симметрии.

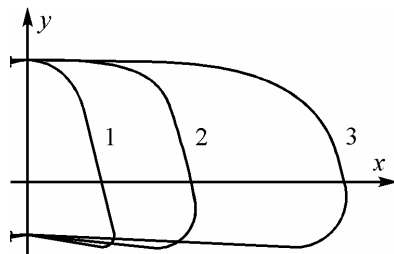


Рис. 1. Трапецевидный контур: 1 — $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/4$; 2 — $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3/4$; 3 — $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3/2$

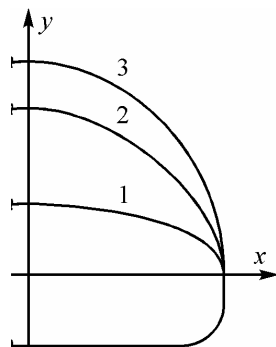


Рис. 2. Прямоугольно-эллиптический контур: 1 — $\lambda_1 = 1/4$, $\lambda_2 = 1/2$; 2 — $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/4$; 3 — $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$

Ниже приводятся значения коэффициентов A , B , C , D , входящих в функцию (1), для контуров различных отверстий (методика их определения изложена в работе [2]).

Трапецевидное (треугольное) отверстие. Пусть $2a$ — нижнее, $2b$ — верхнее основания, h — высота трапеции (рис. 1). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} &= \frac{0,4352\lambda_2 - 0,2821\lambda_1 + 0,1838}{1,6736(\lambda_1 - \lambda_2) + 2,0908}; \\ \frac{A}{h} &= 1,7321(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{D}{h} - 0,2887(\lambda_1 + \lambda_2) - 0,3333; \\ \frac{B}{h} &= [1,7321(\lambda_2 - \lambda_1) - 1] \frac{D}{h} + 0,2887(\lambda_1 + \lambda_2) - 0,1667; \\ \frac{C}{h} &= -\frac{D}{h} + 0,16674; \quad \frac{\delta}{h} = \frac{D}{h} + 0,3333. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\lambda_1 = \frac{a}{h}, \quad \lambda_2 = \frac{b}{h}, \quad 0 < h \leq 2a, \quad 0 < b < a. \quad (4)$$

Если $b = 0$ (т. е. $\lambda_2 = 0$), получаем равнобедренные треугольники, причем $0 < h \leq 2a$.

Прямоугольно-эллиптическое отверстие. Контур отверстия образован прямоугольником шириной $2a$ и высотой c . При этом верхняя сторона прямоугольника криволинейна и является полуэллипсом с вертикальной полуосью b (рис. 2). Для этого случая коэффициенты, входящие в функцию (1), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{D}{a} &= \frac{-g + \sqrt{g^2 - 4fk}}{2f}; \\ \frac{A}{a} &= -\left[1,2405 \frac{D}{a} + 0,2268(\lambda_1 + \lambda_2) + 0,5077\right]; \\ \frac{B}{a} &= 0,2405 \frac{D}{a} - 0,2733(\lambda_1 + \lambda_2) + 0,5077; \\ \frac{C}{a} &= -1,7320 \frac{D}{a} + 0,1340(\lambda_1 + \lambda_2); \\ \frac{\delta}{a} &= 0,3660(\lambda_1 + \lambda_2) + 1,7320 \frac{D}{a}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f &= 10,5002 + \frac{2,9998}{\lambda_1^2}; \\ g &= -0,9028(\lambda_1 + \lambda_2) + 3,2903 + \frac{1}{\lambda_1} - (2,9998 - 0,4642\lambda_3); \\ K &= (\lambda_1 + \lambda_2)[0,0194(\lambda_1 + \lambda_2) - 0,1414] + \lambda_3(0,0180\lambda_3 - 0,2321) - 0,0078; \\ \lambda_1 &= \frac{b}{a}; \quad \lambda_2 = \frac{c}{a}; \quad \lambda_3 = \frac{c}{b} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad 0 < c \leq 2a; \quad 0 < b \leq a. \end{aligned} \quad (6)$$

Если теперь рассмотреть двухосное сжатие пластинки, ослабленной любым из отверстий усилиями γH и $\mu \gamma H$ (γ — объемный вес пород, H — глубина заложения выработки, μ — коэффициент бокового давления), и перейти от плоского обобщенного напряженного состояния к плоской деформации, получим две функции комплексного переменного, определяющие напряжения и перемещения в любой точке грунтового массива вокруг одиночных достаточно заглубленных выработок. Эти функции приводятся в работе [3]. В частности, тангенциальные напряжения в контурных точках любой из вышеуказанных выработок определяются формулой

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma H(F + G \cos \theta + Q \cos 2\theta)}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
 F &= (1 + \mu)(9D^2 + 4C^2 - A^2) + BS; \\
 G &= 2C[(1 + \mu)(B + 6D) + S]; \\
 Q &= (1 + \mu)(A + 3D)B + (3D - A)S; \\
 K &= A^2 + B^2 + 4C^2 + 9D^2; \quad L = 4C(B + 3D); \\
 M &= 2B(3D - A); \quad N = -4AC; \quad R = -6AD; \\
 S &= \frac{1}{A - D}[(1 + \mu)(A + D)B - 2A^2(1 - \mu)].
 \end{aligned} \tag{8}$$

Если в формуле (7) множитель γH заменить на $\mu \gamma H$, а в выражениях (8) положить $\mu = 1$, получим напряжения в контурных точках вертикальной выработки любого из рассматриваемых поперечных сечений.

В случае, когда контуры выработок подвержены равномерному давлению q , дополнительные напряжения на контурах выработок определяются выражениями

$$\sigma_{\theta}^* = q \left(1 - 4 \frac{F^* + G^* \cos \theta + Q \cos 2\theta + S^* \cos 3\theta + T^* \cos 4\theta}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta} \right), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 F^* &= \frac{AB^2}{A - D} + 4C^2 + 9D^2; \\
 G^* &= \frac{2C}{A - D}[AB + (A - D)(B + 6D)]; \\
 Q^* &= \frac{B}{A - D}(6AD - A^2 - 3D^2); \\
 S^* &= -2AC; \quad T^* = -3AD.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты A, B, C, D для различных частных случаев подсчитываются по формулам (1—6).

Так как значению $\theta = 0^\circ$ соответствуют нижние, а $\theta = 180^\circ$ — верхние точки всех отверстий, расположенные на осях симметрии, то коэффициенты концентрации напряжений в этих точках для рассматриваемых выработок при различных соотношениях их геометрических размеров определяются формулами (7—9).

Для выработок, контуры которых свободны от внешней нагрузки,

$$\left. \frac{\sigma_{\theta}}{\gamma H} \right|_{\theta = 0^\circ} = \frac{F + G + Q}{K + L + M + N + R}; \tag{11}$$

$$\left. \frac{\sigma_{\theta}}{\gamma H} \right|_{\theta = 180^\circ} = \frac{F - G + Q}{K - L + M - N + R}. \tag{12}$$

Дополнительные коэффициенты концентрации напряжений в случае, когда контуры выработок подвержены равномерному давлению q :

$$\frac{\sigma_{\theta}^*}{q} \Big|_{\theta=0^\circ} = 1 - 4 \frac{F^* - G^* + Q^* + S^* + T^*}{K + L + M + N + R}; \quad (13)$$

$$\frac{\sigma_{\theta}^*}{q} \Big|_{\theta=180^\circ} = 1 - 4 \frac{F^* - G^* + Q^* - S^* + T^*}{K - L + M - N + R}. \quad (14)$$

Приведенные выше решения позволяют проектировать подземные выработки различных поперечных сечений, подбирая соотношения их геометрических размеров так, чтобы концентрация напряжений в контурных точках сечений была бы наименьшей, в частности, чтобы были наименьшими (или вообще отсутствовали) растягивающие напряжения в кровлях выработок.

Соотношение, позволяющее определить очертания сечений указанных выработок, получается из формулы (12) при $\sigma_{\theta} = 0$:

$$F - G + Q = 0. \quad (15)$$

В качестве примера рассмотрим выработку прямоугольно-эллиптического поперечного сечения. Коэффициенты A, B, C, D , входящие в функцию (1), определяются формулами (5), (6). Вычисляя эти коэффициенты при различных значениях λ_1 и λ_2 , из соотношений (8) находим величины F, G, Q и, подставляя их в выражение (15), определяем значение коэффициента бокового давления, соответствующего заданным отношениям линейных размеров сечения выработки.

На основании указанных расчетов на рис. 3 построены графики, позволяющие определить величины λ_1 и λ_2 при известном значении коэффициента μ для выработок, в кровле которых нет растягивающих усилий. Например, если $\mu = 0,39$, а $\lambda_2 = c/a = 1$, из графиков находим, что $\lambda_1 = b/a = 0,5$. Имея λ_1 и λ_2 , определяем коэффициенты отображающей функции и записываем уравнения искомого контура сечения выработки (2).

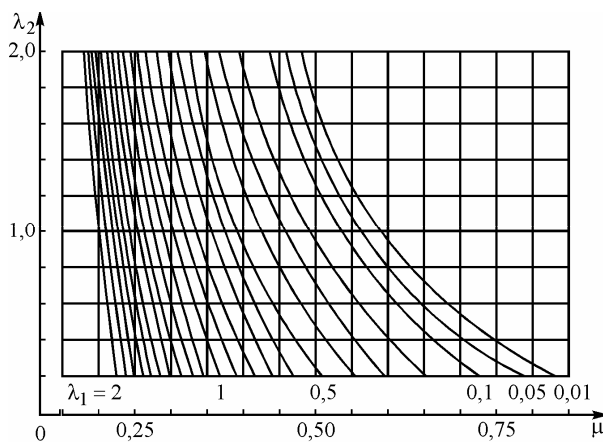


Рис. 3. Зависимость отношений геометрических размеров выработки прямоугольно-эллиптического поперечного сечения, не имеющей в кровле растягивающих напряжений, от коэффициента бокового давления

На рис. 4 построен этот контур и эпюра напряжений σ_θ , вычисленных по формуле (7). Как видно, кровля выработки практически свободна от напряжений. Сжимающие усилия в боках выработки распределены достаточно равномерно, и их наибольшее значение соответствует $3,73\gamma H$. Растягивающие напряжения имеются только в подошве, и их наибольшая величина — $0,29\gamma H$.

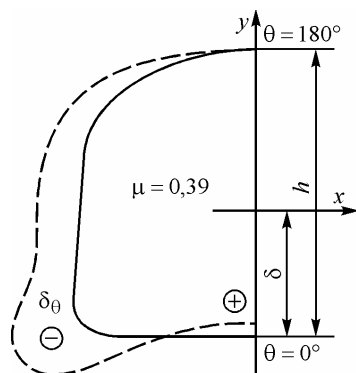


Рис. 4. Выработка прямоугольно-эллиптического поперечного сечения. Эпюра тангенциальных напряжений

На рис. 5 приведены аналогичные графики для выработок следующих сечений: 1 — прямоугольного ($\lambda = a/b$, $0 < b \leq a$, $2a$ — горизонтальная, $2b$ — вертикальная стороны прямоугольника); 2 — полупараболического (контур отверстия образован прямой и параболой, $\lambda = P/b$, $0,3 \leq \lambda < +\infty$, P — фокальный параметр параболы, b — наибольшая высота выработки); 3 — параболического (контур образован двумя одинаковыми параболой, $\lambda = P/b$, $0 < \lambda < +\infty$, P — фокальный параметр парабол, $2b$ — наибольшая высота выработки); 4 — полуэллиптического и эллиптического ($\lambda = a/b$, $0 < b \leq a$, a — горизонтальная, b — вертикальная полуоси эллипса); 5 — прямоугольного. Построение контуров сечений выработок с использованием графиков рис. 5 проводится так же, как в случае выработки прямоугольно-эллиптического сечения.

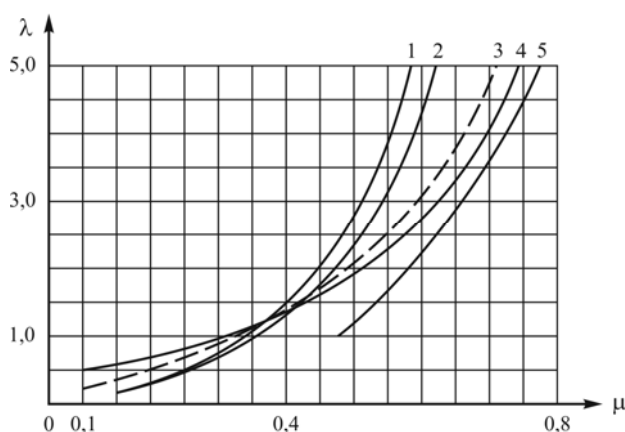


Рис. 5. Зависимость отношений геометрических размеров выработок различных сечений, не имеющих в кровле растягивающих напряжений, от коэффициента бокового давления

Проанализируем зависимость между величиной коэффициента бокового давления и отношениями линейных размеров сечений выработок при условии выполнения соотношения (15). Для полуэллиптического сечения, например, имеем

$$\lambda = \frac{0,2755 + 1,3036\mu}{1 - \mu}. \quad (16)$$

Отсюда следует, что при увеличении μ от 0,2 до 0,75 величина λ увеличивается от 0,67 до 5. Если $\mu = 0$, на контуре при $\theta = 180^\circ$ появляется точка возврата, напряжения в которой $\sigma_\theta = -0,487\gamma H$ (подстановка коэффициентов отображающей функции для полуэллиптического сечения при $\lambda = 0,2755$ в формулу (7) приводит к неопределенности вида 0/0, которая раскрывается по правилу Лопиталя). При $\mu \rightarrow 1$ $a \rightarrow \infty$. В этом случае σ_θ при $\theta = 90, 270^\circ$ стремиться к бесконечности, а во всех других точках контура — к нулю.

Отметим, что у рассмотренных выше выработок не только нет растягивающих усилий в кровле, но и сжимающие усилия в боках при заданном значении коэффициента μ минимальны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 4-е изд. перераб. и доп. М.: АН СССР, 1954. 647 с.
2. Цветков В. К. Расчет устойчивости откосов и склонов. Волгоград: Нижне-Волжское кн. изд-во, 1979. 238 с.
3. Цветков В. К. Напряжения и деформации в гравитационном полупространстве, ослабленном призматическими полостями различных форм // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1970. № 3. С. 29—35.
1. Muskhelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. 4-e izd. pererab. i dop. M.: AN SSSR, 1954. 647 s.
2. Tsvetkov V. K. Raschet ustoychivosti otkosov i sklonov. Volgograd: Nizhne-Volzhskoe kn. izd-vo, 1979. 238 s.
3. Tsvetkov V. K. Napryazheniya i deformatsii v gravitatsionnom poluprostranstve, oslablennom prizmaticheskimi polostyami razlichnykh form // Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh. 1970. № 3. S. 29—35.

© Богомолов А. Н., Цветкова Е. В., 2014

Поступила в редакцию
в декабре 2014 г.

Ссылка для цитирования:

Богомолов А. Н., Цветкова Е. В. Оптимальные размеры поперечных сечений различных выработок и общие формулы для определения тангенциальных напряжений на их контурах // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2014. Вып. 4(35). Ст. 10. Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>

For citation:

Bogomolov A. N., Tsvetkova E. V. [Optimum sizes of cross sections of various developments and general formulas for the determination of tangential tension on their contours]. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2014, no. 4(35), paper 10. (In Russ.). Available at: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>