УДК 624.04

В.В. Галишникова, В.А. Игнатьев

РАСЧЕТ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ УЗЛОВ

Предложен новый алгоритм расчета шарнирно-стержневых систем с большими перемещениями узлов. Лежащие в его основе математическая и физическая модели позволяют наиболее просто получить систему разрешающих нелинейных алгебраических уравнений шарнирно-стержневой системы.

Тросовые системы или стержневые системы из материалов, подобных по физико-механическим свойствам резине, получают при нагружениях перемещения узлов и удлинения стержней, соизмеримые с размерами системы. При этом связь между напряжениями и деформациями, как правило, нелинейная, площади поперечных сечений стержней изменяются в процессе деформации системы под нагрузкой.

Применяемые в настоящее время в инженерной практике методы решения геометрически и физически нелинейных задач, основанные на пошаговых процедурах изменения параметров (нагрузки, жесткости, времени и т.д.) и итерационных процедурах [1, 2, 3 и др.], громоздки и в целом ряде случаев могут привести к недостоверному или неудовлетворительному результату.

Предложенный в [5, 6] метод расчета рассматриваемых систем является наиболее эффективным с точки зрения конечного результата и точности расчета. Однако реализующий его алгоритм и разрешающая система нелинейных уравнений являются громоздкими и трудно формализуемыми.

В данной работе предлагается более удобный алгоритм расчета на основе математической и физической моделей, позволяющих, как и в [5, 6], учесть геометрическую и физическую нелинейность шарнирно-стержневых систем.

Получение разрешающих уравнений

Пусть плоская шарнирно-стержневая система (рис. 1) имеет Y узлов C стержней и C_0 опорных связей. Нагрузка приложена в узлах системы. За неизвестные примем смещения узлов системы и усилия в стержнях и опорных связях.

Нелинейная упругость материала стержней определяется соотношением $\sigma = F(\varepsilon)$, аппроксимируемым аналитической кривой или полученной экспериментально конкретной диаграммой растяжения-сжатия материала (рис. 2).

В ненагруженном состоянии координаты узлов системы и длины стержней связаны известными геометрическими соотношениями (рис. 3):

$$l_t = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2}$$
$$\cos\alpha_t = \frac{x_j - x_i}{l_t}, \quad \sin\alpha_t = \frac{y_j - y_i}{l_t}. \tag{1}$$

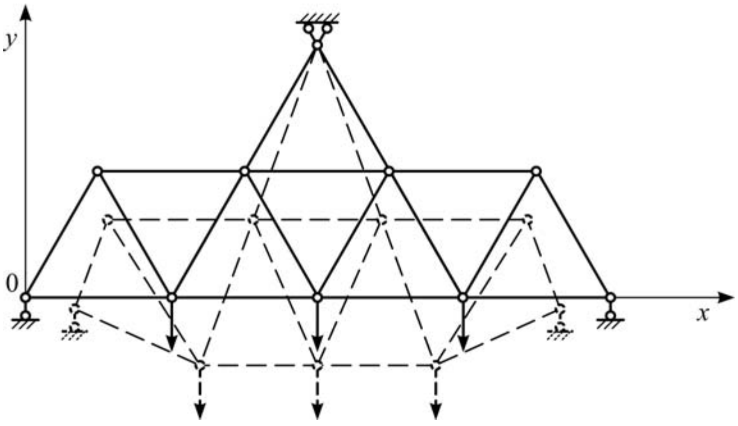

Рис. 1

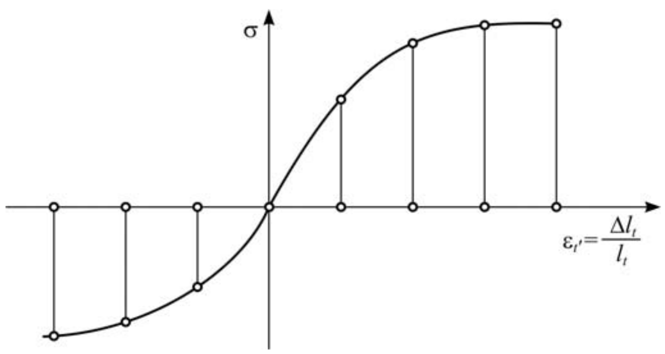

Рис. 2

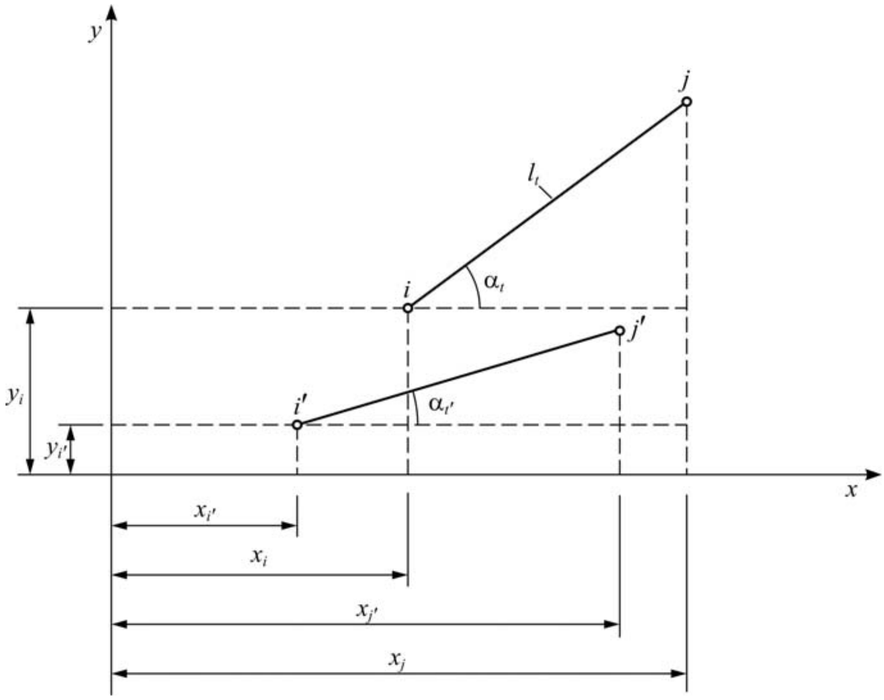

Рис. 3

В нагруженном состоянии новые координаты узлов и длины стержней определяются теми же соотношениями:

$$l_{t'} = \sqrt{\left(x_{j'} - x_{i'}\right)^2 + \left(y_{j'} - y_{i'}\right)^2},$$

$$\cos\alpha_{t'} = \frac{x_{j'} - x_{i'}}{l_{t'}}, \quad \sin\alpha_{t'} = \frac{y_{j'} - y_{i'}}{l_{t'}}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} &y_{i'} = y_i + \Delta y_i, \quad x_{i'} = x_i + \Delta x_i, \\ &y_{j'} = y_j + \Delta y_j, \quad x_{j'} = x_j + \Delta x_j, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\Delta x_i, \Delta x_j, \Delta y_i, \Delta y_j$ — приращения соответствующих координат узлов.

Абсолютное и относительное удлинения *t*-го стержня системы определяются на основании (1)—(3) следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Delta l_t &= l_{t'} - l_t = \\ &= \sqrt{\left[\left(x_j + \Delta x_j\right) - \left(x_i + \Delta x_i\right)\right]^2 + \left[\left(y_j + \Delta y_j\right) - \left(y_i + \Delta y_i\right)\right]^2} - \\ &- \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Относительному удлинению $\varepsilon_{t'}$ на диаграмме $\sigma — \varepsilon$ (рис. 2) будет соответствовать определенное значение $\sigma_{t'} = E_{t'}\varepsilon_{t'}$.

Так как при действии продольных сил происходит изменение длины стержня при одновременном сохранении его объема, то площадь сечения стержня также изменяется:

$$F_{t'} = \frac{F_t}{k_{t'}}, \text{ где } k_{t'} = \frac{l_{t'}}{l_t} = \frac{l_t + \Delta l_t}{l_t} = 1 + \varepsilon_{t'}. \tag{5}$$

Следовательно, усилие в стержне *t*

$$N_{t'} = \sigma_{t'} F_{t'} = k_{t'} F_{t'} \cdot \sigma_{t'}. \tag{6}$$

В деформированном состоянии все узлы системы должны находиться в равновесии.

В прекциях на оси координат условия равновесия произвольного узла *i* имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sum_t^{w_i} \left(N_{t'} \cos\alpha_{t'}\right) + P_i \cos\alpha_i = 0, \\ &\sum_t^{w_i} \left(N_{t'} \sin\alpha_{t'}\right) + P_i \sin\alpha_i = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $t \in w_i$, w_i — множество номеров стержней, примыкающих к узлу i (в том числе и опорных стержней).

В уравнениях (7) неизвестными являются величины усилий $N_{t'}$ и узлы α_t.

Из выражений (2) видно, что величины $\sin\alpha_t$, $\cos\alpha_t$ определяются через приращения координат узлов $\Delta x_i, \Delta y_i$. Усилия $N_{t'}$ определяются выражением (6), в котором величины k_t и $\sigma_{t'}$ выражаются через Δl_t и, следовательно, через узловые перемещения $\Delta x_i, \Delta y_i$.

Таким образом, в условия равновесия (7) войдут только неизвестные перемещения узлов $\Delta x_i, \Delta y_i$, число которых равно удвоенному числу узлов, включая и опорные. Количество уравнений (7) также равно удвоенному числу узлов.

Следовательно, система нелинейных алгебраических уравнений (7) является полной.

В общем случае аналитического решения эта система не имеет. Она может быть решена только численно, в частности, по методу Ньютона.

В качестве начального приближения можно принять для $\Delta x_i, \Delta y_i$ нулевые значения, соответствующие ненагруженной системе.

Более эффективным при построении решения полученных нелинейных уравнений является метод продолжения по параметру в сочетании с итерационным уточнением решения по методу Ньютона.

Как уже отмечено выше, важное значение в методе Ньютона имеет выбор начального приближения. Поэтому шаг продолжения по параметру выбирается малым, чтобы решение на последующем шаге находилось в окрестности предыдущего шага.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 118 с.

2. *Шалашилин В.И.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация / В.И. Шалашилин, Е.Б. Кузнецов. М., 1999. 224 с.

3. *Дарков А.В.* Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. М. : Высш. школа, 1986.

4. *Зылев В.Б.* Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М. : НИЦ «Инженер», 1999. 144 с.

5. Математическая модель шарнирной стержневой системы с большими перемещениями узлов / Н.А. Тарануха, К.В. Жеребко, А.Н. Петрова, М.Р. Петров // Известия вузов. Строительство. 2003. № 3. С. 12—18.

6. Расчет стержневых систем / К.В. Жеребко, А.Н. Петрова, М.Р. Петров, А.Ю. Опарин. Комсомольск-на-Амуре, 2002. 106 с.