

УДК 625.853:519.21

Н.П. Толстиков

**УЧЕТ АСИММЕТРИЧНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА СНИЖЕНИЯ РОВНОСТИ
АСФАЛЬТОБЕТОННЫХ ПОКРЫТИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕЙБУЛЛА**

Рассмотрена динамика нарастания остаточных деформаций и постепенных (износowych) отказов покрытий, характеризующихся асимметричным распределением вероятностей. Разработана методика оценки адекватности теоретических и эмпирических данных путем построения полосы надежности на вероятностной бумаге.

К л ю ч е в ы е с л о в а: асфальтобетонные покрытия; распределение Вейбулла; дорожные конструкции.

Here considered the dynamics of the road pavements evenness decreasing in process of road exploitation. On this basis developed the technique of the asymmetric property an empirical material account and offered the way of an estimation of adequacy of Weibull distribution to the empirical data.

К e y w o r d s: asphalt concrete pavement; Weibull distribution; road structures.

Деформация ровности асфальтобетонных покрытий является сложным стохастическим процессом, исследование которого возможно только на основе статистического анализа и вероятностных методов обоснования и оценки уровня надежности.

Для достоверного прогнозирования с заранее заданной надежностью необходимо располагать репрезентативным объемом фактического материала, характеризующего динамику снижения ровности покрытий в процессе эксплуатации. Однако в настоящее время подобные данные крайне ограничены. В этих условиях целесообразно использовать метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), который как бы дополняет имеющийся объем натурных измерений множеством вариантов, возможных при априорно принятом распределении вероятностей случайной величины.

Вариации выборочных оценок статистических параметров, как известно, характеризуются распределениями вероятностей (частостью их появления в том или ином интервале статистического ряда). Поэтому правильно выбранная аналитическая функция, адекватно оценивающая реальные процессы, дает основание полагать, что лежащая в ее основе стохастическая схема в известной мере отображает общие закономерности формирования рассматриваемого процесса. Этим и оправдывается возможность некоторой экстраполяции принятой теоретической функции.

Математической статистикой разработаны различные типы функций распределения вероятностей, в той или иной мере удовлетворяющие процессам, связанных с описанием постепенных (износowych) отказов. Суждение о пригодности функции распределения в значительной степени зависит от состава входящих в эти функции числовых характеристик, определяемых по материалам эмпирической выборки и позволяющих индивидуализировать принятое распределение применительно к конкретным условиям.

Установлено [1], что во многих случаях исследований компонентов, входящих в систему дорожной конструкции, возможно использование распределения Вейбулла, общая запись которого может быть представлена в виде плотности вероятностей

$$f(x_i, \gamma_i, a) = \frac{\gamma}{a} \left(\frac{x_i}{a}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{x_i}{a}\right)^{\gamma}\right], \quad (1)$$

где x_i — аргумент функции; γ_i — параметр формы; a — параметр масштаба.

Следует отметить, что распределение Вейбулла асимметрично и в зависимости от сочетаний параметров может иметь как положительную, так и отрицательную асимметрию. Так, при колебаниях коэффициента вариации в пределах $C_v = 0,05 \dots 0,31$ по ровности, асимметрия отрицательная. При $C_v = 0,314$ и $\gamma = 3,6$ коэффициент $C_S = 0$, что означает преобразование распределения Вейбулла в нормальный закон. Однако уже при $C_S = 0,32$ и $\gamma \leq 3,6$ появляется положительная асимметрия, достаточно быстро прогрессирующая. Следовательно, распределение Вейбулла является универсальным законом, дающим возможность оценивать три статистических параметра: центр распределения, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии.

Связь между параметрами распределения Вейбулла и стандартом M_x , C_v , C_S выражается следующими трансцендентными уравнениями (2, 3, 4):

$$M_x = a \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right); \quad (2)$$

$$C_v = \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right]^{1/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}; \quad (3)$$

$$C_S = \frac{\frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\gamma}\right)}{\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} - 3 \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} + 2}{\left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} - 1\right]^{3/2}}, \quad (4)$$

где Γ — символы гамма-функции Эйлера соответствующих аргументов.

Для упрощения расчетов по уравнениям (3, 4) в диапазоне $C_v = 0,05 \dots 0,5$ можно воспользоваться аппроксимирующими зависимостями ($\eta \geq 0,999$):

$$\gamma^{-1} = 0,89 C_v - 0,0019; \quad (5)$$

$$C_S = 2,843 C_v^{0,7124} - 1,2435; \quad (6)$$

$$C_S / C_v = 2,397 - 0,5375 \gamma^{1,169}; \quad (7)$$

$$\gamma = 3,765 - 1,09665 C_S / C_v. \quad (8)$$

Математическое ожидание M_x , определяемое по выборочным данным, является несмещенной оценкой. Значения C_v и C_S смещены, причем, если смещенность C_v невелика и может быть исправлена введением множителя $n/n-1$ к выборочному центральному моменту второго порядка, то смещенность C_S и, соответственно, отношение C_S / C_v может измеряться десятками процентов. Так, при обработке четырех массивов выборочных данных, состоящих из 100 членов, ошибка в определении отношения C_S / C_v , если C_S вычислять по формуле

$$C_S = \frac{n \sum (x_i - \bar{x})^3}{\sigma_x^3 (n-1)(n-2)}, \quad (9)$$

составила 2...6 % по сравнению с результатом, вычисленным по формулам (4) или (6, 7). Если те же статистические ряды разбивать на интервалы и вычислять коэффициент асимметрии по формуле

$$C_S = \frac{\mu_3 n}{\sigma_x^3 (n-1)(n-2)}, \quad (10)$$

где μ_3 — третий центральный момент, то величина ошибки в определении отношения C_S / C_v составляет 15...75 %, что совершенно недопустимо.

Следует отметить, что общепринятая методика обработки экспериментальных данных [3] опирается на два параметра, определяемых по выборке: центр распределения и коэффициент вариации. Указанные параметры являются необходимым, но недостаточным условием для характеристики статистического ряда, поскольку не учитывают коэффициент асимметрии C_S . В этом случае не используется информация, содержащаяся в экспериментальном материале. В то же время введение в расчет параметра C_S , если его определять по выборке, приводит к утрате еще одной степени свободы вариационного ряда, а это означает существенное снижение известного критерия согласия Пирсона. Дело в том, что указанный критерий разработан применительно к дискретным распределениям, когда каждому значению соответствует определенная конечная вероятность.

При использовании критерия Пирсона к непрерывным распределениям диапазон колебаний рассматриваемых величин приходится разделять на интервалы (разряды), границы которых назначаются достаточно субъективно. Между тем, величина расхождений, оцениваемых упомянутым критерием, существенно зависит от разделения на интервалы. Кроме того, при исследовании динамики постепенных отказов кривая распределения, построенная по экспериментальным данным, практически удовлетворительно выражает среднюю часть распределения, но часто не подходит по критерию согласия Пирсона для значений, расположенных в «хвостах» кривой. В результате износных явлений в этих зонах обычно группируются значения, достигшие некоего физического предела, который, как правило, регламентируется в качестве нормативного показателя. К тому же, вероятность появления исследуемых величин в экстремальной зоне представляет особый интерес в связи с возможной экстраполяцией и прогнозированием времени безотказной работы.

Поскольку критерий χ^2 в подобных случаях указывает на малую значимость адекватности, возникает вопрос оценки неполного соответствия типа распределения из-за расхождений в одной или в обеих экстремальных зонах.

Следует, однако, иметь в виду, что вероятность повторяемости может быть определена исходя из положения, которое занимают случайные значения выборочных данных в составе ранжированных рядов. Динамика непрерывного накопления остаточных деформаций, а, следовательно, и измеренные ежегодные показатели ровности представляют естественно ранжированный по возрастанию статистический ряд. Оценка вероятности отказа любого члена ряда должна исходить из осреднения вероятностей их появления в ранжированной выборке. Выражение, соответствующее математическому ожиданию искомой вероятности отказа, будет иметь следующий вид [4]:

$$P_m = m / n + 1, \quad (11)$$

где P_m — оценка вероятности отказа члена ряда, занимающего m -е место в ранжированной выборке объемом n .

Тогда эмпирическая вероятность надежности каждого члена ряда выразится соотношением

$$P_s = 1 - P_m. \quad (12)$$

Для построения аналитической кривой надежности найдем интегральную функцию распределения Вейбулла, которая численно равна функции отказов. После интегрирования выражения (1) имеем:

$$F(x) = \int_0^x \frac{r}{a} \left(\frac{x_i}{a} \right)^{\gamma-1} \exp \left[-\left(\frac{x_i}{a} \right)^{\gamma} \right] dx = 1 - \exp \left[-\left(\frac{x_i}{a} \right)^{\gamma} \right]. \quad (13)$$

Параметр масштаба a определяется по формуле

$$a = \frac{1}{\mu} = \frac{\bar{x}}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)}. \quad (14)$$

С учетом (14) функция вероятности надежной работы будет равна

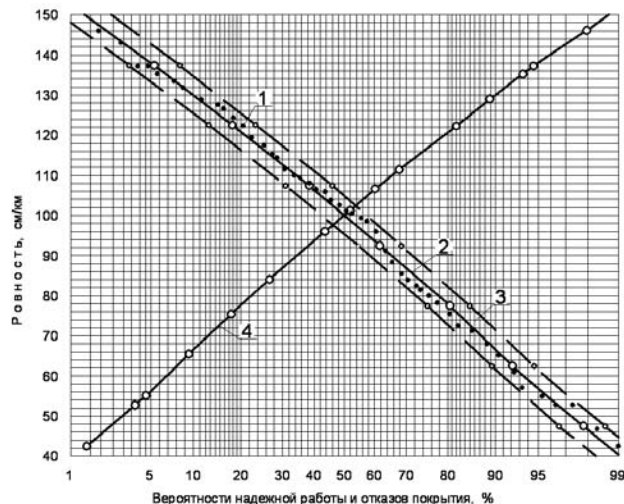
$$P_{\text{над}} = 1 - F(x) = \exp \left[-\left(\mu^{\gamma} x_i^{\gamma} \right) \right]. \quad (15)$$

Для проверки соответствия эмпирических и теоретических вероятностей координаты точек, вычисленных по формулам (12, 15), отмечаются на специальной клетчатке вероятности с функциональной шкалой по оси абсцисс и равномерной шкалой по оси ординат (рис.). Благодаря клетчатке, точки располагаются на очень пологих выпуклых кривых, если $C_s < 0$. Если же $C_s > 0$, то кривая расположения точек будет полого-вогнутой, а наклон ее к горизонтальной оси тем круче, чем больше C_v .

Найденная кривая надежности отвечает среднему значению ежегодных измерений ровности. В действительности всегда имеет место разброс среднего арифметического относительно его истинного значения. Следовательно, вместо одной кривой надежности целесообразно определять полосу надежности, ограниченную доверительными интервалами, вычисляемыми по формуле

$$\delta = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \arg \Phi (R_a = 0,95), \quad (16)$$

где δ — разброс среднеарифметического значения; σ_x — среднеквадратическое отклонение; $\arg \Phi(R_q = 0,95)$ — аргумент функции Лапласа с доверительной вероятностью 95 %; n — число измерений.



Полоса надежной работы покрытия, соответствующая доверительной вероятности $R_q = 95\%$: 1 — эмпирические точки кривой надежности; 2 — кривая надежности распределения Вейбулла; 3 — полоса надежности; 4 — кривая отказов

Для построения полосы надежности необходимо воспользоваться выражением (15).

Если полоса надежности, нанесенная на ту же клетчатку (см. рис.), накрывает значения вероятностей эмпирических точек, то это свидетельствует о том, что аналитическая кривая и ее параметры подобраны правильно и отвечают выборочным данным. Если же вероятности эмпирических точек, вычисленные по формуле (12), располагаются за пределами полосы надежности, это, прежде всего, указывает на недопустимую ошибку в определении коэффициента асимметрии. В этом случае необходимо изменить отношение C_S / C_v при неизменном значении C_v , добиваясь способом итерации соответствия вероятностей теоретической кривой и эмпирических вероятностей случайной величины в ранжированном ряду.

Таким образом, для наиболее полной индивидуализации распределения Вейбулла конкретному материалу натурных измерений необходимо выборочно оценивать три параметра: центр распределения $\bar{x}$, коэффициенты вариации C_v и асимметрии C_S .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Семенов В.А. Качество и однородность автомобильных дорог. М. : Транспорт, 1989. С. 125.
2. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. М. : Мир, 1959. С. 395.
3. Завадский Ю.В. Методика статистической обработки экспериментальных данных. М. : МАДИ, 1973. С. 98.
4. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. Гидрологические основы управления речным стоком. М. : Наука, 1981. С. 255.

© Толстиков Н.П., 2008

Поступила в редакцию в 2008 г.